

第四编 立体几何初步

第九章 立体几何初步

第一节 简单几何体的表面积和体积(第 56 页)

真题重现

(2014)某铁制零件是如图所示的几何体,其底面是边长为 6cm 的正方形,高为 5cm ,内孔半径为 1cm 。

(I) 求该零件的体积;

(II) 已知铁的密度为 $7.8\text{g}/\text{cm}^3$, 问制造 1000 个这样的零件, 需要铁多少千克? (注: π 取 3.14, 质量 = 密度 $\times$ 体积)

分析 该几何体是长方体挖掉一个圆柱体形成的。

解 (I) 该零件的体积 $V = 6 \times 6 \times 5 - \pi \times 1^2 \times 5 = 180 - 5\pi$ 。

(II) 制造 1000 个这样的零件, 需要铁的质量为: $y = 7.8 \times (180 - 5\pi) = 1281.54$ (克)。

答: 制造 1000 个这样的零件, 需要铁 1281.54 克。

考点 简单几何体的体积

典例解析

例 1

练习 1. 如图, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, 若 $AB = BC = CD = 2$, 则该三棱锥的侧视图 (投影线平行于 BD) 的面积为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2
C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

解析 由已知 $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 C 到 BD 的距离为 $d = \sqrt{2}$, 三棱锥的侧视图 (投影线平行于 BD) 的面积为 $\frac{1}{2} \times AB \times d = \sqrt{2}$ 。

考点 简单几何体的体积

练习 2. 已知圆柱与圆锥的底面积相等, 高也相等, 它们的体积分别为 V_1 和 V_2 , 则 $V_1 : V_2 =$ ()

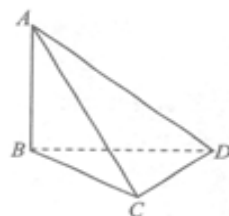
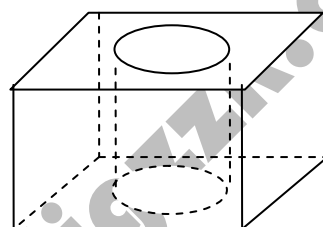
- A. 1:3 B. 1:1 C. 2:1 D. 3:1

【答案】D

解析 $V_1 : V_2 = (Sh) : (\frac{1}{3}Sh) = 3:1$

考点 简单几何体的表面积和体积

例 2



练习 1. 球的体积与其表面积数值相等, 则球的表面积等于 ()

- A. π B. 4π
C. 16π D. 36π

【答案】D

解析 设球的半径为 R , 则可得 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$, 解得 $R = 3$. 所以此球的表面积为 $S = 4\pi \times 3^2 = 36\pi$.

考点 简单几何体的表面积和体积。

练习 2. 如果两个球的体积之比为 $8:27$, 那么两个球的半径之比为 ()

- A. $8:27$ B. $2:3$
C. $4:9$ D. $2:9$

【答案】B

解析 因为 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \frac{8}{27}$, 所以 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$

考点 简单几何体的体积

例 3

练习

一个正方体的顶点都在球面上, 它的棱长为 2cm , 则球的表面积是 ()

- A. $8\pi\text{cm}^2$ B. $12\pi\text{cm}^2$
C. $16\pi\text{cm}^2$ D. $20\pi\text{cm}^2$

【答案】B

解析 该球是正方体的外接球, 直径长等于正方体的体对角线长, 即 $d = 2\sqrt{3}\text{cm}$, 所以球的表面积

$$S = \pi d^2 = 12\pi\text{cm}^2$$

考点 简单几何体的表面积和体积

同步练习(第 44 页)

第一节 简单几何体的表面积和体积

1. 【答案】C

解析 因为半径为 3 的球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$, 选 C

考点 简单几何体的表面积和体积

2. 【答案】D

解析 设球半径为 R ，则 $4\pi R^2 = 9\pi$ ， $\therefore R = \frac{3}{2}$

则 $V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{2}$ ，故选 D

考点 简单几何体的表面积和体积

3. 【答案】B

解析 设火星半径为 r_1 ，地球半径为 r_2 ，

$\therefore r_2 = 2r_1$ ，体积分别为 $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$ ， $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$ $\therefore \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = 8$

考点 简单几何体的表面积和体积

4. 【答案】C

解析 $R_2 : R_1 = 2:1$ ， $V_2 : V_1 = R_2^3 : R_1^3 = 8:1$

考点 简单几何体的表面积和体积

5. 【答案】C

解析 三个球的体积为： $V = 3 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$ ，设圆柱的高为 h ，则 $4\pi R^3 = \pi R^2 h$ ，所以 $h = 4R$ 。

考点 简单几何体的表面积和体积

6. 【答案】B

解析 设原棱锥高为 h ，底面面积 S ，则 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，新棱锥的高为 $\frac{h}{2}$ ，底面面积为 $9S$ ，

$\therefore V' = \frac{1}{3} \times 9S \times \frac{h}{2} \therefore \frac{V'}{V} = \frac{9}{2}$

考点 简单几何体的表面积和体积

7. 【答案】 12π

解析 根据题意，由于圆柱的底面半径为 2，高为 1，则圆柱的底面积为 $2 \times \pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times 1 = 12\pi$ 。

考点 简单几何体的表面积和体积

8. 【答案】 50π

解析 由题意长方体的外接球的直径就是长方体的对角线，长方体的对角线为： $\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ ，

所以球的半径为： $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ；则这个球的表面积是： $4\pi \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi$ 。

考点 简单几何体的表面积和体积

9. 【答案】 $\sqrt{3}$

解析 设底面正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，又底面边长为 2 可得 $OA = \sqrt{2}$ ， $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} PO \cdot S_{ABCD}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{3} PO \cdot 2^2 \Rightarrow PO = 1, PA = \sqrt{PO^2 + AO^2}$$

$$= \sqrt{3}$$

考点 简单几何体的表面积和体积

10. 分析 由题意求出底面面积，然后求出三棱锥的体积.

解 三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ， $PA = 3$ ，底面 ABC 是边长为 2 的正三角形，所以底面

面积为： $\sqrt{3}$ ；三棱锥的体积为： $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 3 = \sqrt{3}$

考点 简单几何体的表面积和体积

第四编 立体几何初步

第九章 立体几何初步

第二节 三视图(第 57 页)

真题重现

(2014) 下列平面图形绕直线 l 旋转一周, 能得到下图 1 所示的几何体的是 (B)

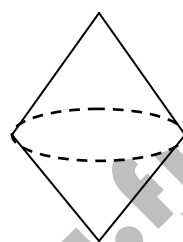
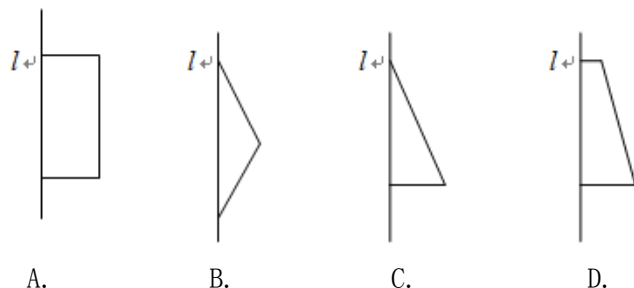
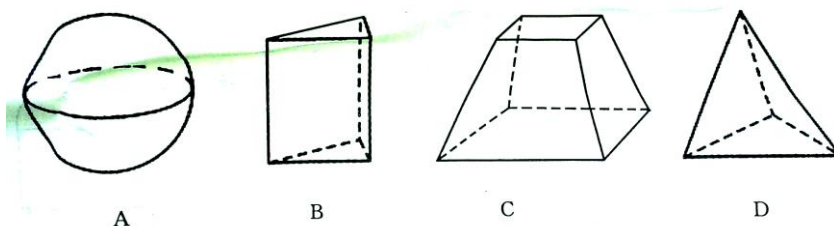


图 1

解析 圆锥是由直角三角形绕一直角边旋转而成.

考点 旋转体的定义

(2015) 下列几何体是棱柱的是 (B)



解析 棱柱是有两个面互相平行, 其余各面都是四边形, 且每相邻两个四边形的公共边都互相平行, 由这些面所围成的几何体.

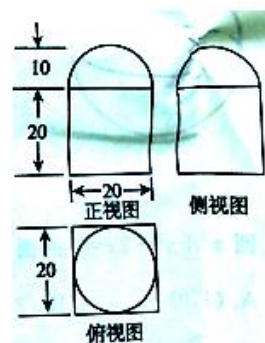
考点 几何体的直观图

(2015) 某实心零件是一个几何体, 其三视图如图所示

(单位: 毫米, π 取 3.14);

(I) 求该零件的表面积;

(II) 电镀这种零件需要用锌, 已知每平方毫米用锌 1.1×10^{-4} 克, 问电镀 100000 个零件需用锌多少克?



分析 由三视图得该几何体是一个组合体, 上半部是一个半球, 下半部是一个圆柱.

解 (I) 该零件的表面积 $S = 2\pi \times 10^2 + 2\pi \times 10 \times 20 + \pi \times 10^2 = 700\pi$.

(II) 电镀 100000 个这样的零件, 需要锌的质量为: $y = 100000 \times 700\pi \times 1.1 \times 10^{-4} \approx 24178$ (克).

答：制造 100000 个这样的零件，需要锌 24178 克。

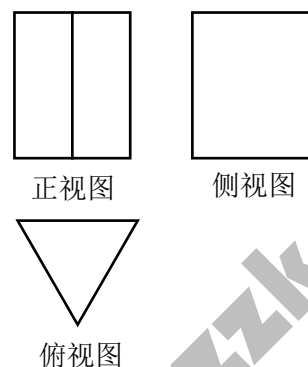
考点 几何体的三视图和体积

(2016) 一个几何体的三视图如右图所示，则该几何体可以是(C)

A. 三棱锥 B. 三棱台 C. 三棱柱 D. 四棱柱

解析 由三视图得该几何体是柱体

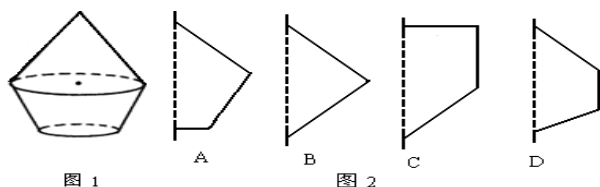
考点 几何体的三视图



典例解析

例 1

练习 1. 图 1 是由图 2 中的哪个平面图旋转而得到的 ()

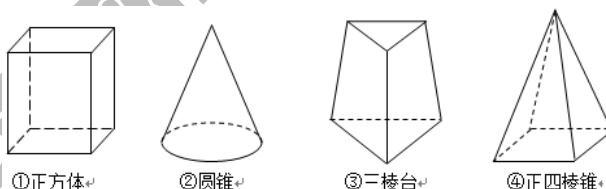


【答案】A

解析 图一显然是一个圆锥和一个圆台的组合体.

考点 空间几何体

练习 2. 下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是 ()

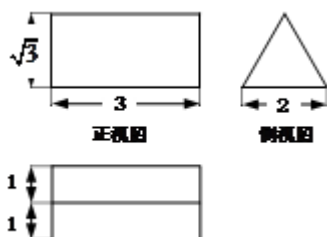


A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②④

【答案】D

例 2

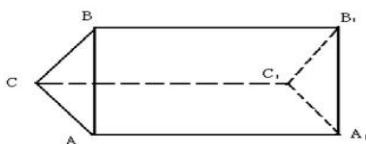
练习 1. 如图是一个几何体的三视图 (尺寸的长度单位为 cm), 则它的体积是 () cm^3 .



- A. $3\sqrt{3}$ B. 18
C. $2\sqrt{3}+18$ D. $\sqrt{3}$

【答案】A

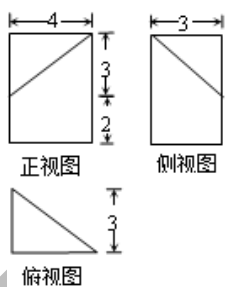
解析 根据几何体的三视图，还原几何体，是正三棱柱，



根据数据可得 $V = Sh = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ 。

考点 几何体的三视图和体积

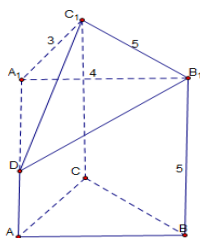
练习 2. 若某三棱柱截去一个三棱锥后所剩几何体的三视图如下图所示，则此几何体的体积等于（ ）



- A. 30 B. 12 C. 24 D. 4

【答案】C

解析 由三视图可知，空间几何体的直观图如下图所示：



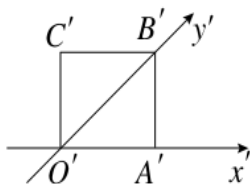
所求几何体的体积 $V = V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} - V_{\text{三棱锥}D-A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 5 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 3 = 30 - 6 = 24$

考点 几何体的三视图和体积

例 3

练习 如图所示，正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为 1，它是水平放置的一个平面图形的直观图，则原图形的周长是（ ）

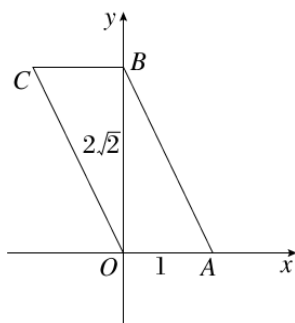
- A. 6 B. 8
C. $2+3\sqrt{2}$ D. $2+2\sqrt{3}$



【答案】B

解析 如图， $OB=2\sqrt{2}$ ， $OA=1$ ，则 $AB=3$ 。

$\therefore$ 周长为 8。



考点 空间几何体的直观图

同步练习(第 45 页)

第二节 三视图(第 45 页)

1. **【答案】D**

解析 由已知可得原几何体是一个圆锥和圆柱的合体，上部分是一个圆锥，下部分是一个圆柱，而且圆锥和圆柱的底面积相等

考点 几何体的三视图

2. **【答案】C**

解析 对于原几何体中能够看到的棱或边界在三视图中画实线，不能看到的棱或边界在三视图中画虚线或不画。

考点 几何体的三视图

3. **【答案】B**

解析 几何体是圆柱， $V = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$.

考点 几何体的三视图和体积

4、【答案】B

解析 由三视图可知该几何体是四棱锥，其底面是长为3，宽为2的矩形，高为2，

$$\text{所以 } V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 \times 2 = 4$$

考点 几何体的三视图和体积

5、【答案】D

解析 若是D，则正视图中上方的矩形中应该有条直线，故不是D.

考点 几何体的三视图

6、【答案】A

解析 在原 $\triangle ABC$ 中， $AO \perp BC$ ，

$$\therefore A'O' = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore AO = \sqrt{3}$$

$$\therefore B'O' = C'O' = 1 \therefore BC = 2 \therefore AB = AC = 2$$

$\therefore \triangle ABC$ 为正三角形.

考点 几何体的直观图

7、【答案】棱台

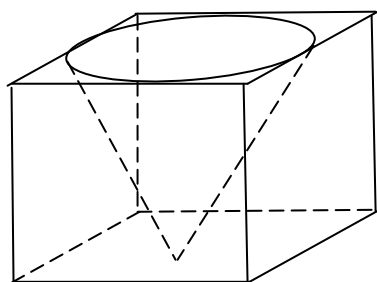
解析 由三视图不难得，从正面和侧面看都是梯形，从上面和下面看是正方形，发挥空间想象力，可以想到连接相应顶点的四条线段就是几何体的四条侧棱，故这个几何体为棱台.

考点 几何体的三视图

8、【答案】 $8 - \frac{2}{3}\pi$

解析 这个几何体是一个棱长为2的立方体中挖去一个圆锥，这个圆锥的高为2，底面半径为1，如

$$\text{图所示，所以这个几何体的体积为 } 2^3 - \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 2 = 8 - \frac{2}{3}\pi.$$



考点 组合体的三视图和体积

9、【答案】108

解析 几何体为下面是底边长为6，高为2的正四棱柱，上面是底边长为6，高为3的正四棱锥，体积

$$V = 6 \times 6 \times 2 + \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3 = 108$$

考点 几何体的三视图和体积

10. 分析 这个几何体是一个简单组合体，它的下部是一个圆柱（底面半径为 1cm ，高为 2cm ），它的上部是一个圆锥（底面半径为 1cm ，母线长为 2cm ，高为 $\sqrt{3}\text{cm}$ ）。

解 （I）这个几何体的直观图如图 2-2 所示。



图 2-2

（II）这个几何体是一个简单组合体，它的下部是一个圆柱（底面半径为 1cm ，高为 2cm ），它的上部是一个圆锥（底面半径为 1cm ，母线长为 2cm ，高为 $\sqrt{3}\text{cm}$ ）。

所以所求表面积 $S = \pi \times 1^2 + 2\pi \times 1 \times 2 + \pi \times 1 \times 2 = 7\pi (\text{cm}^2)$ ，

$$\text{所求体积 } V = \pi \times 1^2 \times 2 + \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = 2\pi + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi (\text{cm}^3)$$

考点 组合体的三视图和表面积、体积

第四编 立体几何初步

第九章 立体几何初步

第三节 空间几何体中的平行问题(第 60 页)

典例解析

例 1

练习 下列命题中正确的是 ()

- A. 一直线与一平面平行, 这个平面内有无数条直线与它平行.
- B. 平行于同一直线的两个平面平行.
- C. 与两相交平面的交线平行的直线必平行于这两个相交平面.
- D. 两条平行直线中的一条与一个平面平行, 则另一条也与该平面平行.

【答案】A

解析 由题可知, A 有线面平行的性质可得到, 正确; B 平行于同一直线的两个平面也有可能相交, 错误; C 与两相交平面的交线平行的直线也有可能在一个平面里, 错误; D 两条平行直线中的一条与一个平面平行, 则另一条也有可能在该平面里, 错误;

考点 线面平行的性质及其判定定理

例 2

练习 1. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 垂直于同一直线的两条直线互相平行
- B. 垂直于同一平面的两条直线互相平行
- C. 垂直于同一平面的两个平面互相平行
- D. 平行于同一平面的两条直线互相平行

【答案】B

解析 在 A 中: 垂直于同一直线的两条直线相交、平行或异面, 故 A 错误;

在 B 中: 由线面垂直的性质定理得垂直于同一平面的两条直线互相平行, 故 B 正确;

在 C 中: 垂直于同一平面的两个平面相交或平行, 故 C 错误;

在 D 中: 平行于同一平面的两条直线相交、平行或异面.

考点 空间中直线与平面之间的位置关系.

练习 2. 已知三条直线 m, n, l , 三个平面 α, β, γ . 下面四个命题中, 正确的是 ()

- A. $\left. \begin{matrix} \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$
- B. $\left. \begin{matrix} m // \beta \\ l // m \end{matrix} \right\} \Rightarrow l // \beta$
- C. $\left. \begin{matrix} m // \gamma \\ n // \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow m // n$
- D. $\left. \begin{matrix} m \perp \gamma \\ n \perp \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow m // n$

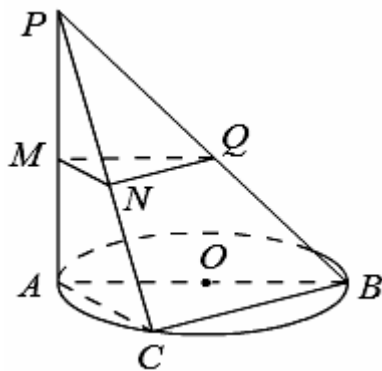
【答案】D

解析 A 中两平面 α, β 可能平行, 可能相交; B 中 l, β 平行或直线在平面内; C 中两直线 m, n 可能平行, 相交或异面; D 中垂直于同一平面的两直线平行是正确的

考点 空间线面平行垂直的判定与性质

例 3

练习 如图, $\odot O$ 在平面 α 内, AB 是 $\odot O$ 的直径, $PA \perp$ 平面 α , C 为圆周上不同于 A, B 的任意一点, M, N, Q 分别是 PA, PC, PB 的中点.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 α ; (2) 求证: 平面 $MNQ \parallel$ 平面 α ;

分析 关于第一问, 注意应用线面平行的判定定理, 同时注意线面平行的判定定理的条件, 注意第二问注意面面平行的判定定理的条件和结论, 注意证明过程的书写.

解: (1) $\because M, N$ 分别是 PA, PC 的中点,

$$\therefore MN \parallel AC.$$

又 $\because MN \not\subset \alpha, AC \subset \alpha$,

$\therefore MN \parallel$ 平面 α .

(2) 由 (1) 知 $MN \parallel$ 平面 α ,

同理可证 $NQ \parallel$ 平面 α .

$\because MN \subset$ 平面 $MNQ, NQ \subset$ 平面 MNQ , 且 $MN \cap NQ = N$,

$\therefore$ 平面 $MNQ \parallel$ 平面 α .

考点 线面平行的判定, 面面平行的判定.

同步练习第 47 页

第三节 空间几何体中的平行问题

1. **【答案】** B

解析 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 所以选项 A 错; 根据直线与平面垂直的性质定理知 B 选项正确; 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 m, n 平行或相交或异面, 所以选项 C 错;

若 $m // \alpha$, $m // \beta$, 则 $\alpha // \beta$ 或 α, β 相交, 所以选项 D 错. 故选 B.

考点 直线、平面的位置关系.

2. 【答案】B

解析 平行于同一条直线的平面平行或相交, 故命题①错误; 平行于同一个平面的两个平面平行, 命题②正确; 由平面与平面平行的性质知命题③正确; 命题④显然正确.

考点 平面与平面平行的判断和平行的性质.

3. 【答案】C

解析 A 中没有公共点的两条直线平行或异面; B 中与同一直线垂直的两条直线平行, 相交或异面; C 中结论正确; D 中直线 $a //$ 平面 α 或直线 a 平面 α 相交

考点 空间线面的位置关系

4. 【答案】B

解析 ① m, n 可能异面; ② n 可能在平面 α 内; ③ 直线 m 可能在平面 β 内; ④ 正确,

考点 空间中点、线、面的位置关系

5. 【答案】 $a // b$

解析 因为 $a // \alpha$, 过 a 作一个平面与 α 相交, 交线为 l , 则 $a // l$, 同理作一个平面与 β 相交, 交线为 c , 则 $a // c$, 所以 $c // l$, 所以 $b // l$, 故 $a // b$.

考点 空间中直线与平面之间的位置关系

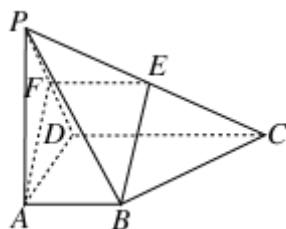
6. 【答案】2

解析 ① 根据面面垂直的性质可知, 垂直于同一平面的两个平面可能平行, 可能相交, 所以①错误. ② 根据面面平行的判定定理要求直线 m, n 必须是相交直线, 所以结论不成立, 所以②错误. ③ 根据面面平行的性质可知, 面面平行, 一个平面内的任何一条直线必和平面平行, 所以③正确. ④ 因为 $l // \gamma, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n$, 所以 $l // m, l // n$, 根据平行的传递性可知, $m // n$ 成立.

考点 空间中直线与平面之间的位置关系.

7. 【答案】平行

解析 取 PD 的中点 F , 连接 EF ,



在 $\triangle PCD$ 中, $EF = \frac{1}{2} CD$.

又 $\because AB \parallel CD$ 且 $CD = 2AB$,

$\therefore EF = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

$\therefore EB \parallel AF$.

又 $\because EB \not\subset$ 平面 PAD , $AF \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore BE \parallel$ 平面 PAD .

考点 线面平行的判定

8. 【答案】①④

解析 ①若 $l \parallel n$ 且 $m \parallel n$, 则 $l \parallel m$; 利用平行的传递性成立。

②若 $l \parallel \alpha$ 且 $m \parallel \alpha$, 则 $l \parallel m$; 平行同一个平面的两直线可以有三种位置关系, 错误

③若 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$; 两平面可能相交, 错误

④若 $\alpha \parallel \gamma$ 且 $\beta \parallel \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$; 利用平行的传递性成立。

考点 线、面平行的判定和性质

9. **分析** 第一问由线线平行 $AD \parallel BC$ 可以得到 $BC \parallel$ 平面 $ADEF$, 再利用线面平行的性质定理可以得到 $BC \parallel EF$; 第二问利用锥体的体积公式可得到。

解: (1) 因为 $AD \parallel BC$, $AD \subset$ 平面 $ADEF$, $BC \not\subset$ 平面 $ADEF$,
所以 $BC \parallel$ 平面 $ADEF$,

又 $BC \subset$ 平面 $BCEF$, 平面 $BCEF \cap$ 平面 $ADEF = EF$,

所以 $BC \parallel EF$.

(2) 在平面 $ABCD$ 内作 $BH \perp AD$ 于点 H ,

因为 $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $BH \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $DE \perp BH$,

又 $AD, DE \subset$ 平面 $ADEF$, $AD \cap DE = D$,

所以 $BH \perp$ 平面 $ADEF$,

所以 BH 是三棱锥 $B-DEF$ 的高。

在直角三角形 ABH 中, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, 所以 $BH = \sqrt{3}$,

因为 $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $DE \perp AD$,

又由 (1) 知, $BC \parallel EF$, 且 $AD \parallel BC$, 所以 $AD \parallel EF$, 所以 $DE \perp EF$,

所以三棱锥 $B-DEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle DEF} \times BH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

考点 线面平行判定定理与性质定理, 线面垂直判定定理与性质定理, 三棱锥体积

10. **分析** 第一问 E 是中点, 正方形对角线互相平分, O 也是中点, 利用三角形中位线定理可得线线平行, 第二问考查旋转体的体积。

解：(1) 连接 A, C 交 BD 于 O ，连接 EO

Q $ABCD$ 是正方形，

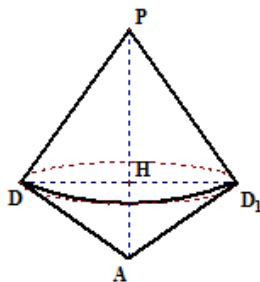
$\therefore O$ 为 AC 中点， E 为 PA 的中点，

$\therefore OE // PA$

又Q $OE // PA$ 平面 BDE ， $PA \not\subset$ 平面 BDE ， $PA //$ 平面 BDE

(2) 过 D 作 PA 的垂线，垂足为 H ，

则几何体为 DH 为半径，分别以 PH, AH 为高的两个圆锥的组合物



侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$

$\therefore PD \perp DA$ ， $PD = 4, DA = DC = 3$ ，

$\therefore PA = 5$

$$DH = \frac{PD \cdot DA}{PA} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi DH^2 \cdot PH + \frac{1}{3} \pi DH^2 \cdot AH$$

$$= \frac{1}{3} \pi DH^2 PA = \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5 = \frac{48}{5} \pi$$

考点 线面平行的判定定理，旋转体的体积。

第四编 立体几何初步

第九章 立体几何初步

第四节 空间几何体的垂直问题 (第 61 页)

真题重现

(2016) 如图, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=AB$, $AC=1$, $\angle BAC=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$.

(1) 求证: $AC \perp PB$

(2) 求三棱锥 $P-ABC$ 的表面积.

【解析】

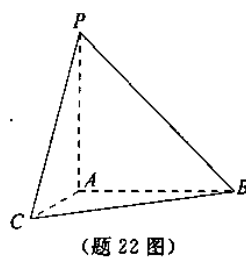
(1) $\because PA \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC

$\therefore PA \perp AC$

又 $\angle BAC=90^\circ$, $\therefore AB \perp AC$, 又 $PA \cap AB = A \therefore AC \perp$ 面 PAB

$PB \subset$ 面 PAB , $\therefore AC \perp PB$

(2) $AC=1$, $\angle BAC=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$, $\therefore AB=\sqrt{3} \therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AP = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$



(题 22 图)

典例解析

例 1

练习 1. 设 l, m 是两条不同的直线, α 是一个平面, 则下列命题正确的是 ()

A. 若 $l \perp m$, $m \subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha$

B. 若 $l \perp \alpha$, $l // m$, 则 $m \perp \alpha$

C. 若 $l // \alpha$, $m \subset \alpha$, 则 $l // m$

D. 若 $l // \alpha$, $m // \alpha$, 则 $l // m$

【答案】B

解析 A 中线面可能垂直可能斜交或平行或直线在平面内; B 中由线面垂直的判定可知结论正确; C 中两条直线可能平行或异面; D 中两直线可能平行相交或异面

考点 空间线面垂直平行的判定与性质

练习 2. 已知 l, m, n 是三条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $l \perp m, l \perp n, m \subset \alpha, n \subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha$

B. 若 $l \perp \alpha, \alpha // \beta, m \subset \beta$, 则 $l \perp m$

C. 若 $l // m, m \subset \alpha$, 则 $l // \alpha$

D. 若 $l \perp \alpha, \alpha \perp \beta, m \subset \beta$, 则 $l // m$

【答案】B

解析 A 中, 由线面垂直的判定定理可知, 需满足: m, n 是两条相交直线, 结论才成立, 故 A 项错误;

B 中, 因为 $l \perp \alpha, \alpha // \beta$, 所以 $l \perp \beta$. 又 $m \subset \beta$, 所以 $l \perp m$, 故 B 项正确; C 中, 由线面平行的判定定理可知, 需满足: l 在平面 α 外, 结论才成立, 故 C 项错误; D 中, l 与 m 还可以相交或异面, 故 D 项错误, 故选 B.

考点 空间中直线与平面的平行与垂直关系.

例2

练习 如果直线 m, n 与平面 α, β, γ 满足: $n = \beta \cap \gamma, n // \alpha, m \subset \alpha$ 和 $m \perp \gamma$, 那么必有 ()

- A. $\alpha // \beta$ 且 $\alpha \perp \gamma$ B. $\alpha \perp \gamma$ 且 $m \perp n$
C. $m // \beta$ 且 $m \perp n$ D. $\alpha \perp \gamma$ 且 $m // \beta$

【答案】B

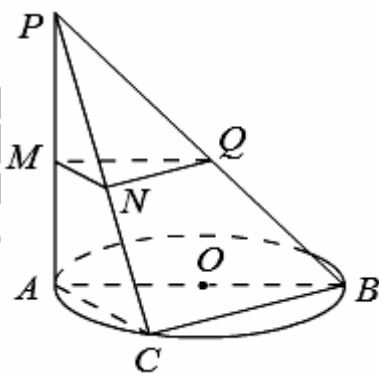
解析 $\because m \subset \alpha, m \perp \gamma \therefore \alpha \perp \gamma$

$\because n = \beta \cap \gamma, m \perp \gamma \therefore m \perp n$.

考点 空间直线与平面的位置关系

例 3

练习 如图, $\odot O$ 在平面 α 内, AB 是 $\odot O$ 的直径, $PA \perp$ 平面 α , C 为圆周上不同于 A, B 的任意一点, M, N, Q 分别是 PA, PC, PB 的中点. 求证: $BC \perp$ 平面 PAC .



分析 要证明线面垂直, 先证线线垂直. 由已知容易得到 $BC \perp PA$, 再利用直径所对圆周角为 90° , 可得 $BC \perp AC$.

解: $\because PA \perp$ 平面 $\alpha, BC \subset$ 平面 α ,

$\therefore BC \perp PA$.

又 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, C 为圆周上不同于 A, B 的任意一点,

$\therefore BC \perp AC$.

$\because PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

考点 线面垂直的判定.

同步练习 (第 49 页)

第四节 空间几何体的垂直问题

1. 【答案】D

解析 A 中两平面 α, β 可能平行, 可能相交; B 中 l, β 平行, 相交或直线在平面内; C 中两直线 m, n 可能平行, 相交或异面; D 中垂直于同一平面的两直线平行是正确的

考点 空间线面平行垂直的判定与性质

2. 【答案】C

解析 A 中若 $m \subset \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $m // \alpha$ 、相交或 $m \subset \alpha$; B 中若 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$, $m \perp n$, 则 $\alpha // \beta$ 或 α, β 相交; C 中根据线面垂直的判定定理进行判断正确; D 中若 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma$, 则 β, γ 相交或平行.

考点 空间线面垂直平行的判定与性质

3. 【答案】D

解析 A 中, m 与 n 可垂直、可异面、可平行; B 中 m 与 n 可平行、可异面; C 中若 $\alpha // \beta$, 仍然满足 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 故 C 错误.

考点 1. 直线与直线的平行与垂直; 2. 平面与平面平行与垂直的命题判断.

4. 【答案】C

解析 对于 A, 根据线面垂直的判定定理, 还要有直线 m, n 相交, 才能得到 $l \perp \alpha$, A 错; 对于 B, 直线 l 与 m 可能平行, 可能相交也可能是异面直线, B 错; 对于 C, 由 $l // m, m \perp \alpha$ 得 $l \perp \alpha$, 又 $n \perp \alpha$, 则 $l // n$, C 正确, 对于 D, 直线 m, n 也是相交、平行, 异面都有可能, D 错. 故选 C.

考点 空间线面的位置关系, 线面垂直, 线线平行.

5. 【答案】B

解析 ①: 根据面面垂直的判定可知, ①错误; ②: 根据线面平行的判定可知, ②正确; ③: 如下图所示, 立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AB_1 与 AD_1 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的射影互相垂直, 而 AB_1 与 AD_1 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, ③错误; ④: m, n 可能斜交, 可能平行, 可能异面, 可能垂直, ④错误, $\therefore$ 正确命题的个数为 1 个, 故选 B.

考点 空间中点线面的位置关系.

6. 【答案】2

解析 (2)(4) 正确. 两平面垂直的性质定理是, 两平面垂直, 平面内的线垂直于交线, 则垂直于两一个平面, 所以 (1)(3) 不正确, 但平面内的直线必垂直于平面内的无数条直

线，因为这无数条直线是平行线，所以（2）正确，由面面垂直性质定理可知（4）正确。

考点 两平面垂直的性质定理

7. 【答案】①

解析 ② AB, CD 夹角 60° ；③ AB, CD 夹角 45° ；④ AB, CD 夹角显然不是 90°

考点 线面角

8. **分析** （I）利用线面垂直判定定理证明；（II）利用面面垂直判定定理证明；（III）取棱 PB 中点 F ，连结 EF ，则 $EF \parallel PA$ ，根据线面平行的判定定理证明 $PA \parallel$ 平面 CEF 。

解：（I）因为 $PC \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PC \perp DC$ 。

又因为 $DC \perp AC$ ，

所以 $DC \perp$ 平面 PAC 。

（II）因为 $AB \parallel DC$ ， $DC \perp AC$ ，

所以 $AB \perp AC$ 。

因为 $PC \perp$ 平面 $ABCD$ ，

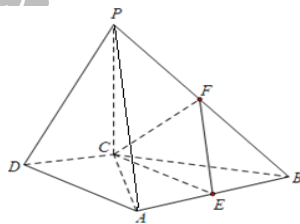
所以 $PC \perp AB$ 。

所以 $AB \perp$ 平面 PAC 。

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAC 。

（III）棱 PB 上存在点 F ，使得 $PA \parallel$ 平面 CEF 。证明如下：

取棱 PB 中点 F ，连结 EF ， CE ， CF 。



又因为 E 为 AB 的中点，

所以 $EF \parallel PA$ 。

又因为 $PA \not\subset$ 平面 CEF ，

所以 $PA \parallel$ 平面 CEF 。

考点 空间线面平行、垂直的判定定理与性质定理；空间想象能力，推理论证能力

9. **分析** （1）由题可知，若证明线面垂直，则从线线垂直入手，若一条直线垂直于平面内两条相交直线，则线面垂直；（2）证明线面平行由 3 种方法，平行四边形法，中位线法，构造辅助平面法，本题采用三角形中位线法， DO 是三角形 AB_1C 的中位线，因此直线 $AB_1 \parallel$

平面 BC_1D .

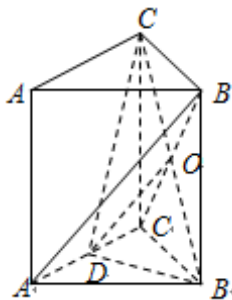
解: (I) 证明: 因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 所以 $CC_1 \perp$ 底面 ABC .

因为 $BD \subset$ 底面 ABC , 所以 $CC_1 \perp BD$. 由已知可得, 底面 ABC 为正三角形.

因为 D 是 AC 中点, 所以 $BD \perp AC$,

$CC_1 \cap AC = C$ 所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

(II) 证明: 如图, 连接 B_1C 交 BC_1 于点 O , 连接 OD .



显然点 O 为 B_1C 的中点. 因为 D 是 AC 中点, 所以 $AB_1 \parallel OD$.

又因为 $OD \subset$ 平面 BC_1D , $AB_1 \not\subset$ 平面 BC_1D ,

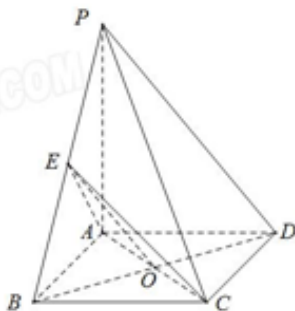
所以直线 $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D .

考点 □线面垂直的判定定理□线面平行的判定定理

10. **分析** (1) 连 BD 交 AC 于 O , 连 EO , 利用三角形的中位线的性质证得 $EO \parallel PD$, 再利用直线和平面平行的判定定理证得 $PD \parallel$ 平面 ACE

; (2) 由条件利用直线和平面垂直的判定定理证得 $BC \perp$ 平面 PAB , 可得 $BC \perp AE$. 再利用等腰直角三角形的性质证得 $AE \perp PB$. 再利用平面和平面垂直的判定定理证得平面 $ACE \perp$ 平面 PBC

解: 连 BD 交 AC 于 O , 连 EO



④ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $\therefore O$ 为 BD 中点

④ E 为 PB 中点, $\therefore EO \parallel PD$

④ $EO \subset$ 平面 ACE , $PD \not\subset$ 平面 ACE ,

$\therefore PD \parallel$ 平面 ACE

(2) ④ $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp BC$

④ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $\therefore BC \perp AB$

④ $PA \cap AB = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 PAB

④ $AE \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp AE$

④ $AP = AD$, E 为 PB 中点, $\therefore AE \perp PB$

④ $BC \cap PB = B$, $\therefore AE \perp$ 平面 PBC

④ $AE \subset$ 平面 ACE , $\therefore$ 平面 $ACE \perp$ 平面 PBC

考点 与平面垂直的判定; 直线与平面平行的判定

第四编 立体几何初步

第九章 立体几何初步

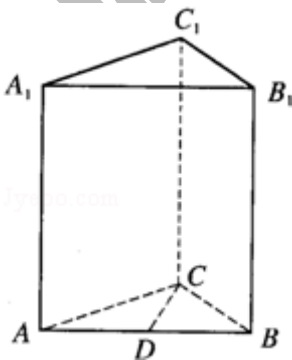
第五节 空间几何体的应用 (第 63 页)

典例解析

例 1

练习 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=2, BC=1$, D 为 AB 中点,

则异面直线 CD 与 A_1C_1 所成的角的大小为 ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】A

解析 $\because A_1C_1 \parallel AC$

$\therefore \angle ACD$ 为异面直线 CD 与 A_1C_1 所成的角

在 $\triangle ACD$ 中, $AC = \sqrt{3}, AD = 1, CD = 1$

$$\cos \angle ACD = \frac{3+1-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \angle ACD = 30^\circ$

考点 异面直线及其所成的角.

例 2

练习 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, A_1D 与 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$, 则

BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

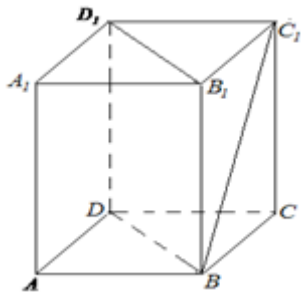
【答案】B

解析 由题意可知, 该长方体实际上式正方体, 因此取 B_1D_1 的中点 O_1 , 则角 C_1BO_1 即为所求的线面角, 则利用已知棱长为 2, 可知, 正弦值为 $\frac{1}{2}$

考点 线面角

例 3

练习 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=2$, $AA_1=1$, 则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】B

解析 设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h,

$$QV_{A_1-ABC} = V_{A-A_1BC} \therefore \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC} \cdot h \therefore \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{1}{3} \times 2 \times h, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

考点 点到面的距离

同步练习 (第 51 页)
第五节 空间几何体的应用

1. 【答案】D

解析 连接 B_1C , 则直线 A_1D 与 BC_1 所成的角为 90° .

考点 异面直线及其所成的角

2. 【答案】A

解析 连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O , 连接 OB , 则 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BDD_1B_1 所成的角, 在 $\triangle C_1BO$ 中, $\sin \angle C_1BO = \frac{1}{2}$, 所以直线 BC_1 与平面 BDD_1B_1 所成的角的大小为 30° .

考点 直线与平面所成的角.

3. 【答案】D

解析 连接 D_1C, AC , 易证 $D_1C \parallel AB$,

$\therefore AC = \sqrt{2}$ 即为异面直线 A_1B 与 AD_1 所成的角. 设 $AB=1$, 则

$$AA_1=2, AD_1=D_1C=\sqrt{5}, AC=\sqrt{2},$$

$$\therefore \cos \angle AD_1C = \frac{5+5-2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

考点 异面直线所成角

4. 【答案】D

解析 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 所以 $C_1D_1 \parallel A_1B_1, AB \parallel A_1B_1$, 从而有 $C_1D_1 \parallel AB$, A 不正确;

连接 BC_1 , 由正方体可得 $BC_1 \perp B_1C, AB \perp$ 面 BB_1C_1C , 从而可得 $AB \perp B_1C$, 所以 $B_1C \perp$ 面 ABC_1 , 可得 $B_1C \perp AC_1$, B 不正确;

因为 $CD \parallel C_1D_1$, 所以 $\angle AC_1D_1$ 是 AC_1 与 CD 所成角. 因为 $AD_1 = \sqrt{2}C_1D_1, AC_1 = \sqrt{3}C_1D_1$, 所以 $\angle AC_1D_1 \neq 45^\circ$, C 不正确;

连接 AC , 由正方体可得 $A_1C_1 \parallel AC$, 所以 $\angle ACB_1$ 是 A_1C_1 与 B_1C 所成角. 在 $\triangle ACB_1$ 中,

因为 $AB_1 = B_1C = AC$, 所以 $\angle ACB_1 = 60^\circ$, D 正确, 故选 D

考点 异面直线所成角

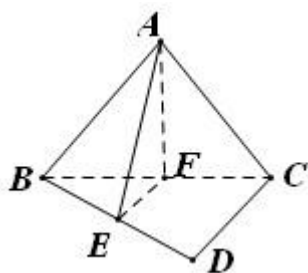
5. 【答案】 60°

解析 注意到 $EF \parallel BD, BD \parallel B_1D_1$, 连 AB_1 , 三角形 AD_1B_1 是正三角形, 所以, 三角形内角为 60° 。由异面直线所成角的定义, 异面直线 AD_1 与 EF 所成角等于 60° 。

考点 异面直线所成的角, 平行关系

6. 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

解析 如图, 取 BC 中点 F , 连接 EF, AF



$\because E, F$ 分别是 BD, BC 中点,

$$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}CD$$

则 $\angle AEF$ 就是 AE 与 CD 所成角

设 $BC = a \because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, F 是 BC 中点, $\therefore AF \perp BC, AF = \frac{a}{2}$

$\because$ 面 $ABC \perp$ 面 $BCD, \therefore AF \perp$ 面 $BCD, \therefore AF \perp EF$

$\because \triangle BCD$ 是正三角形, $\therefore CD = BC = a$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$$

在 $Rt\triangle AEF$ 中, $\because AF = \frac{a}{2}, EF = \frac{a}{2}$

$$\therefore \tan \angle AEF = \frac{AF}{EF} = 1, \text{ 即 } \angle AEF = \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } AE \text{ 与 } CD \text{ 所成角的大小为 } \frac{\pi}{4}$$

考点 异面直线所成角

7. 【答案】 $\frac{\pi}{3}$

解析 连接 A_1B , 连接 A_1C_1 , 则 $A_1B \parallel MN$, $\angle A_1BC_1$ 为所求角; $\triangle A_1BC_1$ 为正三角形,

所以 $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$

考点 异面直线所成角

8. 【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析 可知 $A_1B = A_1D = BD = 2\sqrt{2}$

$$\therefore S_{\triangle A_1BD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle A_1DD_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

$$V_{B-A_1DD_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1DD_1} \cdot BA = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}.$$

设点 D_1 到面 A_1BD 的距离为 h ,

$$Q V_{D_1-A_1BD} = V_{B-A_1DD_1}, \therefore V_{D_1-A_1BD} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BD} h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} h = \frac{4}{3}, \text{解得 } h = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

考点 1 三棱锥的体积; 2 点到面的距离.

9. 分析 要证线面垂直需证直线垂直于平面内两条相交直线, 求异面直线所成角的步骤: 空间取一点, 过该点作两异面直线的平行线, 找到异面直线所成角, 求解三角形得到所求角

解: (1) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\because BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 \therefore$

$$BB_1 \perp A_1C_1.$$

又 $\because$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形.

$$\therefore A_1C_1 \perp B_1D_1. \because B_1D_1 \cap BB_1 = B_1 \quad BB_1 \subset \text{平面 } BB_1D_1D \quad B_1D_1 \subset \text{平面 } BB_1D_1D \therefore$$

$$A_1C_1 \perp \text{平面 } BB_1D_1D.$$

$$(2) \because BB_1 // DD_1 \quad BB_1 = DD_1.$$

$$\therefore \text{四边形 } BB_1D_1D \text{ 为平行四边形; 即 } B_1D_1 // BD.$$

$\therefore \angle DBC_1$ 就是异面直线 B_1D_1 与 BC_1 所成的角.

连接 C_1D , 易得 $\triangle DBC_1$ 为等边三角形, 则 $\angle DBC_1 = 60^\circ$.

$\therefore$ 异面直线 B_1D_1 与 BC_1 所成的角为 60° .

考点 线面垂直的判定即异面直线所成角

10. 分析 (1) 利用直三棱柱的性质和底面三角形的特点得到线面垂直,
 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 进而得到线线垂直。

(2) 假设存在点 D , 满足题意, 则由 $DE // AC_1$, 得到线面平行的判定。

解: 证明: (1) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$,

$\because$ 底面三边长 $AC = 3$, $AB = 5$, $BC = 4$,

$\therefore AC \perp BC$,

又直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp CC_1$,

且 $BC \cap CC_1 = C$,

$BC, CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore AC \perp$ 平面 BCC_1B_1

而 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore AC \perp BC_1$;

(2) 存在, D 是 AB 的中点, 证明: 设 CB_1 与 C_1B 的交点为 E , 连结 DE ,

$\because D$ 是 AB 的中点, E 是 BC_1 的中点,

$\therefore DE // AC_1$,

$\because DE \subset$ 平面 CDB_1 , $AC_1 \not\subset$ 平面 CDB_1 , $\therefore AC_1 //$ 平面 CDB_1 .

考点 线线垂直的证明, 意义线面平行证明



更多资讯请登陆 福建高职招 <http://www.fjgzzk.org>

福建高职招考网 <http://www.fjgzzk.org>