第二编 数列

第三章 数列

第一节 数列的概念和简单表示法（第 31 页）

例 1 练习 A **例 2 练习** B **例 3 练习** D

同步练习（第 22 页）

1. D 2. C 3. D 4. B 5. A 6. 6 7. $\frac{61}{16}$ 8. 3

9. 答案 12 解析 ∵$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n$，∴当 n＝1 时，$a_2=a_1+1=2+1=3$；

当 n＝2 时，$a_3=a_2+2=3+2=5$；

当 n＝3 时，$a_4=a_3+3=5+3=8$；当 n＝4 时，$a_5=a_4+4=8+4=12$，即 $a_5=12$.

10. 答案(1) $a_n=4n-2(n\in N_+)$ (2) 不是$\{a_n\}$中的项

解析 (1)设 $a_n=an+b$，∴$a_1=2=a+b$. $a_{17}=17a+b=66$. ∴a＝4，b＝－2. ∴$a_n=4n-2(n\in N_+)$. (2)令 $4n-2=88$，∴$n=\frac{45}{2}\notin N_+$，不是$\{a_n\}$中的项.

第二节 等差数列的通项公式（第 32 页）

真题重现

(2014 年)1. 答案（Ⅰ）a_n=n+1（Ⅱ）65

解析（Ⅰ）$\begin{cases}a_1+d+a_1+3d=8\\ d=1\end{cases}$ 解得 a_1=2，所以 a_n=n+1（Ⅱ）$s_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\times10}{2}=65$

(2015 年) 2. 答案（Ⅰ）a_n=n（Ⅱ）62

解析（Ⅰ）$\begin{cases}a_1+a_1+d+a_1+2d=8\\ a_1=1\end{cases}$ 解得 d=1，所以 a_n=n

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=2^n$，所以 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$=2+4+8+16++32=62

(2016 年)3. 答案（Ⅰ）$a_n=2n-13$（Ⅱ）-36

解析（Ⅰ）$\begin{cases}a_1+2d=-7\\ a_1=-11\end{cases}$，解得d= 2，所以 $a_n=2n-13$

（Ⅱ）$s_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}=\frac{(-11+2n-13)n}{2}=n^2-12n$，所以当 n=6 时，$s_n$最小为-36

例 1 练习 1 答案（1） 3（2）10 **练习 2** -49

例 2 练习 1 A **练习 2** an＝2n＋1. **例 3 练习 1** 15 **练习 2** 28

同步练习（第 23 页）

1. D 2. C 3. D 4. B 5. C 6._-2,3,8 7._39_ 8. _0_

9. 答案 (1)－52 (2)第 40 项 (3)从第 10 项开始 (4)6 项

10. 答案(1)s＝9.8t (2) 5

解析 (1)由题目表中数据可知，该数列从第 2 项起，每一项与前一项的差都是常数 9.8，所以是一个等差数列模型．因为 a1＝9.8，d＝9.8，所以甲虫的爬行距离 s 与时间 t 的关系是 s＝9.8t.(2)当 t＝1(min)＝60(s)时，s＝9.8t＝9.8×60＝558(cm)．s＝49(cm)时，t＝$\frac{s}{9.8}$＝$\frac{49}{4.8}$＝5（s）

第三节 等差数列的前 n 项和（第 33 页）

真题重现

(2014 年) 1. 答案（Ⅰ）a_n=n+1（Ⅱ）65

解析（Ⅰ）$\begin{cases} a_1+d+a_1+3d=8 \\ d=1 \end{cases}$ 解得 a_1=2，所以 a_n=n+1（Ⅱ）$s_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\times 10}{2}$=65

(2016 年)2. 答案（Ⅰ）a_n＝2n－13（Ⅱ）-36

解析 （Ⅰ） $\begin{cases} a_1+2d=-7 \\ a_1=-11 \end{cases}$，解得d= 2 ，所以 a_n＝2n－13

（Ⅱ）$s_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}=\frac{(-11+2n-13)n}{2}=n^2-12n$，所以当 n=6 时，$s_n$最小为-36

典例解析

例 1 练习 1 解：(1)由 a_n＝a_1＋(n－1)d，a_{10}＝30，a_{20}＝50，

得方程组$\begin{cases} a_1+9d=30, \\ a_1+19d=50. \end{cases}$ 解得 a_1＝12，d＝2. 所以 a_n＝2n＋10.

(2)由 $S_n=na_1+\frac{n\ \ n-1}{2}d$＝242，得方程 $12n+\frac{n\ \ n-1}{2}\times 2$＝242.

解得 n＝11 或 n＝－22(舍去).

练习 2 解析 (1)略 (2)因为 $a_n=3n-2$ 所以

a_1=1 $s_n=\frac{(a_1+a_n)\ n}{2}=\frac{(1+3n-2)\ n}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$

例 2　练习　解析　方法一(1)由 $a_3=5$，$a_{10}=-9$ 得，

$$\begin{cases}a_1+2d=5,\\ a_1+9d=-9,\end{cases}$$ 解得 $a_1=9$，$d=-2$．所以$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=11-2n$.

(2)由(1)知，$S_n=na_1+\frac{n\ \ n-1}{2}d=10n-n^2$，

∴$S_n=-(n-5)^2+25$，又 $n\in\mathrm{N}^*$，　∴当 $n=5$ 时，S_n取得最大值 25.

方法二(1)由 $a_3=5$，$a_{10}=-9$ 得，

$$\begin{cases}a_1+2d=5,\\ a_1+9d=-9,\end{cases}$$ 解得 $a_1=9$，$d=-2$．所以$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=11-2n$.

(2)由(1)知 $a_5=1>0$，$a_6=-1<0$，d 小于 0，所以数列是递减数列，所以 n=5 时 s_n 最大

例 3　练习　答案（1）a=3　k=50（2）$\frac{n^2+3n}{2}$

解析

（Ⅰ）由已知得$a_1=a-1$，$a_2=4$，$a_3=2a$，又$a_1+a_3=2a_2$，$\therefore(a-1)+2a=8$，即$a=3$.

$\therefore a_1=2$，公差$d=a_2-a_1=2$．由$S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d$，

得$2a_1+\frac{k(k-1)}{2}\times2=2550$即$k^2+k-2550=0$．解得$k=50$或$k=-51$(舍去）$\therefore a=3$，$k=50$.

（2）由$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+n$ $\therefore b_n=\frac{S_n}{n}=n+1\therefore\{b_n\}$是等差数列．则

$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=2+3+4+\ldots+(n+1)=\frac{(2+n+1)n}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$

同步练习（第 24 页）

1．B　2．C　3．　B　4．　B　5．　B　6、2550　7．30　8．　60

9．答案　-2017

解析：$\because\frac{S_{14}}{14}-\frac{S_{12}}{12}=2$，$\therefore\frac{\frac{14\ \ a_1+a_{14}}{2}}{14}-\frac{\frac{12\ \ a_1+a_{12}}{2}}{12}=2$，

故 $a_{14}-a_{12}=4$，$\therefore 2d=4$，$d=2$. $\therefore S_{2\,017}=2\ 017a_1+\frac{2017\times(2017-1)}{2}\times2=-2\ 017$.

10. 答案:-63

解析　由 $a_{n+1}=a_n+3$ 知$\{a_n\}$是等差数列,首项为-18,公差为 3,所以 $a_n=-21+3n$.

当 n=7 时, $a_n=0$, 当 n≤6 时, $a_n<0$, 所以当 n=6 或 7 时, S_n 有最小值-63.

第四节 等比数列的通项公式（第 34 页）

真题重现

(2016 年)3. A **例** 1 **练习 1** 2^{n-} 32 **练习 2** 6

例 2 **练习 1** B **练习 2** 答案 3^{n-1} **例** 3 **练习** 答案 128

同步练习（第 25 页）

1. B 2. B 3. D 4. A 5. B 6. 3 7. - 2 8. 81

9. 答案 $a=-4$

解析 ∵$a, 2a+2, 3a+3$ 成等比数列,

∴$(2a+2)^2=a(3a+3)$,

解得 $a=-1$ 或 $a=-4$.

当 $a=-1$ 时，$2a+2, 3a+3$ 均为 0，故应舍去.

当 $a=-4$ 时满足题意，∴$a=-4$.

10. 答案 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

解析：∵ $a_1=2$ 且 a_1，a_3+1，a_4 成等差数列 ∴2（a_3+1)=a_1+a_4

即 $2(a_1q^2+1)=a_1+a_1q^3$ 又 $a_1=2$ 所以 q=2 ∴ $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

第五节 等比数列的前 n 项和（第 35 页）

真题重现

(2015 年)1. 答案（Ⅰ）a_n=n （Ⅱ）62

解析（Ⅰ）$\begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=8 \\ a_1=1 \end{cases}$ 解得 d=1，所以 a_n=n

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=2^n$，所以 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$=2+4+8+16++32=62

例 1 练习 1 答案 314 练习 2 为 2 或-1

例 2 **练习 1** A **练习 2** 答案 4

例 3 **练习** 答案 当 x=1 时 $s_n=n$ ；当 x≠1 时 $s_n=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}$

同步练习（第 26 页）

1. B 2. C 3. D **4.** B **5.** C 6. _2^n-1 7. 6 8. 127 9. 答案 5

解析 由 $S_n=93$，$a_n=48$，公比 $q=2$，得$\begin{cases} a_1\quad 2^n-1\quad =93, \\ a_1\cdot 2^{n-1}=48 \end{cases}$ $\Rightarrow 2^n=32\Rightarrow n=5$.

10. 答案（1）$a_n=2^n$ （2）$=2^{2017}-2$

解析 （1） 因为公比 $q=2$，且 $a_2+a_3=12$，

所以 $2a_1+4a_1=12$， 解得 $a_1=2$， 所以 $a_n=2^n$.

（2）由（1）知 $a_1=2$， $q=2$，

$$S_{2016}=\frac{a_1(1-q^{2016})}{1-q}=\frac{2(1-2^{2016})}{1-2}\qquad =2^{2017}-2.$$

第六节数列的综合与应用（第 36 页）

例 1 练习 答案 8

例 2 **练习** 1 答案(1) $a_n=2n+1$，$S_n=n(n+2)$ (2) $\frac{n}{4\quad n+1}$

解析(1)设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，由于 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$，

∴$a_1+2d=7$，$2a_1+10d=26$，解得 $a_1=3$，$d=2$. 由于 $a_n=a_1+(n-1)d$，$S_n=\frac{n\quad a_1+a_n}{2}$，∴

$a_n=2n+1$，$S_n=n(n+2)$.

(2)∵$a_n=2n+1$，∴$a_n^2-1=4n(n+1)$，

因此 $b_n=\frac{1}{4n\quad n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. 故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4\quad n+1}$.

∴数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{n}{4\quad n+1}$

练习 2. 答案(1) $a_n=2n(n\in N^*)$ (2) $T_n=1-\frac{1}{n+1}$.

解析(1)∵$S_n=n^2+n$,

∴当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$，又 $a_1=2$ 满足上式，

∴$a_n=2n(n\in N^*)$.

(2)证明：∵$S_n=n^2+n=n(n+1)$，∴$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n\quad n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

∴$T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

例 3　练习　答案(1) $a_n=n+2$ (2) 2101

解析(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由已知得$\begin{cases}a_1+d=4,\\(a_1+3d)+(a_1+6d)=15,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=1.\end{cases}$ 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n+2$.

(2)由(1)可得 $b_n=2^n+n$,

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=(2+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^{10}+10)=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{10})+(1+2+3+\cdots+10)$

$=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}+\frac{(1+10)\times10}{2}=2^{11}+53=210$

同步练习（第 27 页）

1. B　2. A　3. C　4. B　5. C　6. 72　7. 10　8. $\frac{175}{16}$

9. 答案(1) $a_n=3^{n-1}$.（2）$S_n=\frac{n^2-n}{2}$.

解析 (1)设$\{a_n\}$的公比为 q，依题意得$\begin{cases}a_1q=3\\a_1q^4=81\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\q=3\end{cases}$，因此，$a_n=3^{n-1}$.（2）

因为$b_n=\log_3 a_n=n-1$，所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和$S_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$.

10. 答案(1) $a_n=2^n$ (2) $S_n=6n^2-22n$.

解析　(1)设$\{a_n\}$的公比为 q，

由已知得 $16=2q^3$，解得 $q=2$，

∴$a_n=a_1q^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)得 $a_3=8$，$a_5=32$，则 $b_3=8$，$b_5=32$，

设$\{b_n\}$的公差为 d，则有

$\begin{cases}b_1+2d=8,\\b_1+4d=32,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b_1=-16,\\d=12.\end{cases}$

从而 $b_n=-16+12(n-1)=12n-28$，

∴数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n(-16+12n-28)}{2}$

$=6n^2-22n$