

第一编 集合 函数与导数

第一章 集合

第一节 集合的含义与表示 (第 1 页)

典例精析

例 1

练习

答案 C

解析 其中①②③是正确的, 对于④点 (a, b) 与点 (b, a) 不同

例 2

练习 用适当的符号填空:

(1) $0 \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{N}$; (2) $\sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$; (3) $0 \underline{\hspace{1cm}} \{x | x^2 = 0\}$ (4) $-1.5 \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{R}$ (5) $\pi \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$;

答案 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\in$ (5) $\notin$

例 3

练习 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x - y \in A\}$,

则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

例 4.

练习 用列举法表示下列集合

(1) $\{x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ 的解}\}$; (2) $\{\text{满足 } 2x - 10 \leq 0 \text{ 的自然数}\}$; (3) $\{a | 0 \leq a < 4, a \in \mathbb{N}\}$,

解析 (1) 列举法表示为 $\{1\}$.

(2) 列举法表示为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(3) 用列举法可以表示为 $\{0, 1, 2, 3\}$

例 5.

练习 用描述法表示下列集合

(1) 位于 x 轴上方所有的点,

(2) 位于第一三象限角平分线上的点

(3) 方程 $2x - 1 = 0$ 的实数根

解析 (1) $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$.

(2) $\{(x, y) | y = x\}$

(3) $\{x \in \mathbb{R} | 2x - 1 = 0\}$

同步练习

第一节 集合的含义与表示 (第 1 页)

1. 答案 B

解析 $(2\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{3})^2 = 24 - 27 < 0$, 故 $2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$. 所以 $a \in M$.

2. 答案 B

解析 $(2, 1)$, $(1, 2)$ 为两个不同元素, 共 2 个.

3. 答案 B

解析 $\because x - 3 < 2, x \in \mathbb{N}^*, \therefore x < 5, x \in \mathbb{N}^*, \therefore x = 1, 2, 3, 4$. 故选 B.

4. 答案 D

解析 A、B 选项中集合的元素都不是实数, 排除 A、B 选项; 又 0 是自然数, 排除 C 项, 故选 D.

5. 答案 B

解析 若 $a = 2$, 则 $6 - a = 6 - 2 = 4 \in A$, 符合要求; 若 $a = 4$, 则 $6 - a = 6 - 4 = 2 \in A$, 符合要求;

若 $a = 6$, 则 $6 - a = 6 - 6 = 0 \notin A$, 不符合要求. $\therefore a = 2$ 或 $a = 4$.

6. 答案 $\{0, 1\}$

解析 $\because x \in A, \therefore$ 当 $x = -1$ 时, $y = |x| = 1$; 当 $x = 0$ 时, $y = |x| = 0$;

当 $x = 1$ 时, $y = |x| = 1. \therefore B = \{0, 1\}$.

7. 答案 $\{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$

8. 答案 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$

解析 由 $\begin{cases} x^2 \neq 0, \\ x^2 \neq -x, \\ -x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$.

9. 答案 $3 < a \leq 6$

解 由 $3x - a < 0$ 得 $x < \frac{a}{3}$, 故 A 表示集合 $\{1\}$ 时, 必须且只需 $1 < \frac{a}{3} \leq 2$,

解得 $3 < a \leq 6$.

10. 答案 $\{0, 1, 4\}$

解析: (1) 当 $x = 1$ 时, $\frac{6}{2+1} = 2 \in \mathbb{N}$. 当 $x = 2$ 时, $\frac{6}{2+2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. 因此 $1 \in B, 2 \notin B$.

(2) $\because \frac{6}{2+x} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}, \therefore 2+x$ 只能取 2, 3, 6. $\therefore x$ 只能取 0, 1, 4. $\therefore B = \{0, 1, 4\}$.

第二节 集合间的基本关系 (第 2 页)

典例精析

例 1

练习 用适当的符号填空

$$(1) \{0, 1\} \underline{\hspace{1cm}} N \quad (2) \emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{x \in R | x^2 + x + 1 = 0\}$$

$$(3) \{1\} \underline{\hspace{1cm}} \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} \quad (4) \{-1, 1\} \underline{\hspace{1cm}} \{x | x^2 - 1 = 0\}$$

答案 (1) $\subseteq$ (2) $=$ (3) $\subseteq$ (4) $=$

例 2

练习 已知 $M = \{x | y = \sqrt{x+2}\}$, $N = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 则集合 M 与 N 之间的关系是_____.

答案: $M \supseteq N$

解析: $\because M = \{x | x \geq -2\}$, $\therefore M \supseteq N$

例 3. 已知集合 $A \subseteq \{1, 2\}$, 且 A 中含有奇数, 则这样的集合 A 的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练习

答案 :1

解析: 由“若 $x \in A$, 则 $5-x \in A$ ”可知, 2 和 3 成对地出现在 A 中, 且 $A \neq \emptyset$.

故集合 A 为 $\{2, 3\}$ 只有 1 个.

例 4. 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 5\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 且满足 $A \subseteq B$, 求实数的取值范围.

练习 设集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x \leq k+1\}$ 且 $A \subseteq B$, 求实数 k 的取值范围.

答案: $k \geq 1$

解析 $\because A \subseteq B, \therefore k+1 \geq 2$

$\therefore$ 解得 $k \geq 1$

例 5. 下列集合中表示空集的是()

- A. $\{x \in R | x+5=5\}$ B. $\{x \in R | x+5>5\}$ C. $\{x \in R | x^2=0\}$ D. $\{x \in R | x^2+1=0\}$

练习 已知集合 $A = \{x | ax - 1 = 0\}$ 若 A 是空集, 求 a 的取值范围 (用集合表示)

答案 $\{0\}$

解析 方程 $ax-1=0$ 无实数根, $\therefore a=0 \therefore a$ 的取值集合 $\{0\}$

同步练习

第二节 集合间的基本关系 (第 2 页)

1. 答案 B

解析 : “ $\in$ ”表示元素与集合的关系, 故 A 正确; 空集是任何集合的子集, 故 C 正确; 因为 $A = \{0, 1\}$, 所以 $\{0, 1\} \subseteq A$, 故 D 正确; $\{1\} \subseteq A$, 故 B 不正确.

2. 答案 D

3. 答案 D

4. 答案 B 解析: 仅有④正确.

5. 答案 C 解析: 其中①②⑤⑥是正确的

6. 答案 1 或 -1.

解析: $\because A=B, \therefore b=0, A=\{0, 1\}, B=\{a^2, 0\}.$

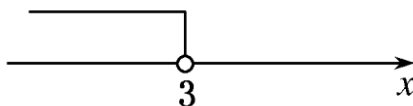
$\therefore a^2=1$, 得 $a=\pm 1$. $a=1$ 时, $a^{2015}+b^{2016}=1$, $a=-1$ 时, $\therefore a^{2017}+b^{2018}=-1$.

$\therefore a^{2017}+b^{2018}=1$ 或 -1

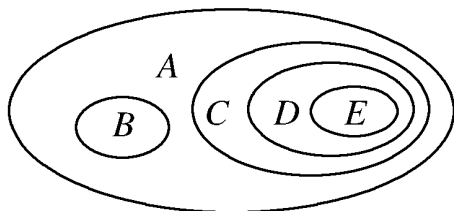
7. 答案 4 解析: $\because B \subseteq A, A=\{-1, 3, m\}, \therefore m=4$.

8. 答案 $m \geq 3$

解析: 将数集 A 标在数轴上, 如图所示, 要满足 $A \subseteq B$, 表示数 m 的点必须在表示 3 的点的右边, 故 $m \geq 3$.



9.



答案: $A = \{\text{四边形}\}, B = \{\text{梯形}\}, C = \{\text{平行四边形}\}, D = \{\text{菱形}\}, E = \{\text{正方形}\}.$

解: 由 Venn 图知, B, C, D, E 均为 A 的子集, 且 $E \subseteq D, D \subseteq C$.

$\because$ 梯形、平行四边形、菱形、正方形都是四边形,

$\therefore A = \{\text{四边形}\}$; 梯形不是平行四边形, 而菱形、正方形是平行四边形,

$\therefore B = \{\text{梯形}\}, C = \{\text{平行四边形}\}$; 正方形是菱形,

$\therefore D = \{\text{菱形}\}, E = \{\text{正方形}\}.$

10. 答案: (1) 8 (2) $\{m \mid -1 \leq m \leq 2 \text{ 或 } m \leq -2\}$.

解: 化简集合 A 得 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$.

(1) $\because x \in \mathbb{Z}, \therefore A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 即 A 中含有 8 个元素,

$\therefore A$ 的非空真子集数为 $2^8 - 2 = 254$ (个).

(2) ①当 $m \leq -2$ 时, $B = \emptyset \subseteq A$; ②当 $m > -2$ 时, $B = \{x \mid m-1 < x < 2m+1\}$, 因此, 要 $B \subseteq A$,

则只要 $\begin{cases} m-1 \geq -2 \\ 2m+1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq m \leq 2$.

综上所述, 知 m 的取值范围是: $\{m \mid -1 \leq m \leq 2 \text{ 或 } m \leq -2\}$.

第三节 集合的基本运算 (第3页)

真题重现

(2014) 1. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

答案 A

(2015) 2. 设集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$

- A. $\{1\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{2, 3, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 5\}$

答案 D

(2016) 3. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

(I) 求 $A \cup B$;

(II) 从 $A \cup B$ 所含的元素中随机抽取两个不同的元素, 求这两个元素都是奇数的概率.

答案 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (2) 略

典例精析

例 1.

练习 设全集为 R , 集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $(-1, 3)$ B. $(-3, 5)$ C. $(-3, -1]$ D. $(-3, 3)$

答案 A

解析: 依题意, 画出数轴表示集合 A 与集合 B , $A \cap B = (-1, 3)$, 故选择 A.

例 2.

练习 设集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{a+1, 5\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 5\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{1, 2, 5\}$

答案 D

解析: $\because A \cap B = \{2\}$, $\therefore 2 \in A, 2 \in B$,

$\therefore a+1=2$, 即 $a=1$, $\therefore A = \{1, b\}$, 从而 $b=2$.

$\therefore A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 5\}$, $\therefore A \cup B = \{1, 2, 5\}$.

例 3.

练习 已知集合 $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | x \leq a\}$, 且 $A \cup B = R$, 则实数 a 的取值范围是_____

答案 $a \geq 1$

例 4.

练习 已知集合 $A=\{1, \sqrt{m}\}$, $B=\{m\}$, $A \cup B=A$, 则 $m=(\quad)$

- A. 1 B. 0 C. 1 或 0 D. 1 或 3

答案 B

解析: 方法一: $\because A \cup B=A, \therefore B \subseteq A$. 又 $A=\{1, \sqrt{m}\}$, $B=\{m\}$,

$\therefore m=1$ 或 $m=\sqrt{m}$. 由 $m=\sqrt{m}$ 得 $m=0$ 或 $m=1$.

但 $m=1$ 不符合集合中元素的互异性, 故舍去, 故 $m=0$

方法二: $\because B=\{1, m\}$, $\therefore m \neq 1$, $\therefore$ 可排除选项 A, C, D.

故选 B.

例 5.

练习 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 5\}$, 则 $A \cap (C_U B)$ 等于 $(\quad)$

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$

答案 D

解析: 由题意得 $C_U B=\{1, 3, 4\}$, 所以 $A \cap (C_U B)=\{1, 3\}$, 故选 D.

同步练习

第三节 集合的基本运算 (第 3 页)

1. 答案 A

2. 答案 B

解析: $M \cap N = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$, 故选 B.

3. 答案 C

解析: 由题分析可得 B 中一定有元素 c , 符合题意的 B 有

这样四个: $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

4. 答案 D

解析: 由集合的运算可知 $M \cup N = \{1, 2, 3\}$, 则 $C_U(M \cap N) = \{4\}$

5.

答案 D

解析: $N = \{0, 1, 4\}$, $\therefore M \cup N = \{0, 1, 2, 4\}$

6. 答案 $\{0, 2\}$

7. 答案 0 或 2

解析：由于 $A \cap B = B$ ，所以 $B \subseteq A$ ，又因为 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{1, m\}$

以及集合中元素的互异性知 $m = 0$ 或 $m = 2$

8. 答案 $\{0, 1\}$

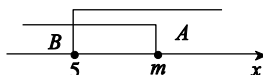
解析： $Q = \{x | \sqrt{x} < 2\} = \{x | 0 \leq x < 4\}$ ， $\therefore P \cap Q = \{0, 1\}$

9. 答案 $\{x | 1 < x \leq 2\}$

解析：因为 $C_U B = (-\infty, 3]$ ，所以 $A \cap B = A$ ，故 $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 2\}$

10. 答案 $m = 6$

解析：用数轴表示集合 A 、 B 如图所示.



由于 $A \cap B = \{x | 5 \leq x \leq 6\}$ ，得 $m = 6$.

11. 答案 (1) $\{x | 2 \leq x < 3\}$.

(2) $a > -4$

解析：(1) $\because B = \{x | x \geq 2\}$ ， $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{x | 2 \leq x < 3\}$.

(2) $\because C = \left\{x \mid x > -\frac{a}{2}\right\}$ ， $B \cup C = C \Leftrightarrow B \subseteq C$ ，

$\therefore -\frac{a}{2} \geq 2$ ， $\therefore a \leq -4$

第四节 集合的综合运用 (第 4 页)

典例精析

例 1.

练习 已知集合 M, P 满足 $M \cup P = M$, 则一定有 ()

- A. $M = P$ B. $M \supseteq P$ C. $M \cap P = M$ D. $M \subseteq P$

答案 B

例 2.

练习 已知集合 $A = \{0, 1\}, B = \{x | x^2 - ax = 0\}$, 且 $A \cap B = B$, 求实数 a 的值。

答案 0 或 1

解析 根据 $A \cap B = B$, $\therefore B \subseteq A$

$$\because B = \{x | x^2 - ax = 0\}, \therefore B = \{x | x = 0 \text{ 或 } x = a\} \quad B = \{0, 1\} \text{ 或 } \{0\},$$

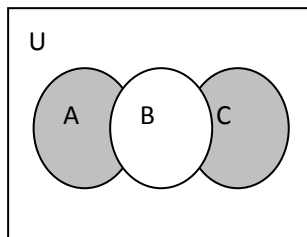
$\therefore$ 方程 $x^2 - ax = 0$ 有两个实数根 0, 1, 或只有 1 个实数根 0

$\therefore a = 1$ 或 0

例 3.

练习 如右图, 那么阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $B \cap [C_U(A \cup C)]$ B. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
C. $(A \cup C) \cap (C_U B)$ D. $[C_U(A \cap C)] \cap B$



答案 C

例 4.

练习 已知集合 $M = \{-1, 1, 2\}$, 集合 $N = \{y | y = x^2, x \in M\}$, 则 $M \cap N$ 的子集个数为 ____

答案 2

例 5. 集合 $P = \{(x, y) | x + y = 0\}$, $Q = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 则 $P \cap Q =$ ____

练习 1. 已知集合 $A = \{(x, y) | 2x - y = 0\}$, $B = \{(x, y) | 4x - 2y = 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____

答案 $\emptyset$

练习 2. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{1, 3, 4\}$, 集合 $B = \{2, 4\}$, 则 $(C_U A) \cap B =$ ()

A. $\{2, 4, 5\}$ B. $\{1, 3, 4\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$

答案 A

同步练习

第四节 集合的综合运用 (第 4 页)

1. 答案 D

解析 直接利用交集运算得答案.

$$\because A = \{0, 2, 4, 6\}, B = \{2, 4, 8, 16\},$$

$$\text{则 } A \cap B = \{0, 2, 4, 6\} \cap \{2, 4, 8, 16\} = \{2, 4\}.$$

2. 答案 B

解析 先解不等式确定出集合 M, 然后根据选项判断即可.

$$\text{由 } 3 - 2x < 0 \text{ 得: } x > \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以 } M = \{x | x > \frac{3}{2}\}. \text{ 显然 } 0 \notin M, 2 \in M.$$

3. 答案 C

解析 $\because B \subseteq A$, 当 $m = 2$ 时, $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2\}$ 符合题意;

当 $m^2 = m$ 时, $m = 0$ 或 $m = 1$,

当 $m = 0$ 时, $A = \{1, 2, 0\}, B = \{1, 0\}$ 符合题意;

$m = 1$ 不满足集合元素互异性, 舍去.

4. 答案 D

解析 由集合的运算可知 $M \cup N = \{1, 2, 3\}$, 则 $C_U(M \cap N) = \{4\}$,

5. 答案 D

6. 答案 -1

解析: $x^2 = 0$ 时, $x = 0$, 不合题意;

$x^2=1$ 时, $x=\pm 1$, $x=1$ 不合题意,

$x^2=x$, $x=0$ 或 $x=1$, 都不合题意, 所以 $x=-1$.

7. 答案 0 或 2

解析: 由于 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$, 又因为 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, m\}$

以及集合中元素的互异性知 $m=0$ 或 $m=2$,

8. 答案 $\{1, 4\}$

解析: $\because$ 全集 $M = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 且 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$,

$\therefore C_M A = \{-1, 0, 1, 4\}$; 又 $B \subset A \cup B$,

$\therefore B \cap (C_U A) = \{1, 4\}$.

9. 答案 (1) $A \cap B = \{x | 2 \leq x < 3\}$ (2) $a \leq 3$

解析 (1) 由题已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 由交集的定义易得

$$A \cap B = \{x | 2 \leq x < 3\}$$

(2) 由已知 $B \cup C = C$, 可得: $B \subseteq C$, 结合数轴可求出 $a-1 \leq 2$, 即 $a \leq 3$.

10. 答案 (1) $A \cap B = \{x | -4 < x \leq -3\}$ $A \cup B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$

(2) $A \cap (C_R B) = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 0\}$

解析: (1) $A = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3\}$, $B = \{x | -4 < x < 0\}$

$$A \cap B = \{x | -4 < x \leq -3\} \quad A \cup B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$$

(2) 由题意可得 $C_R B = \{x \leq -4 \text{ 或 } x \geq 0\}$

$$A \cap (C_R B) = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 0\}$$

第二章 函数与基本初等函数

第一节 函数的概念 (第 6 页)

真题重现

(2014) 4. 函数 $y = \sqrt{1-x}$ 的定义域是 ()

- A. $\{x|x>1\}$ B. $\{x|x\geq 1\}$ C. $\{x|x<1\}$ D. $\{x|x\leq 1\}$

答案 D

(2016) 1. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

答案 C

典例精析

例 1.

练习 将下列集合用区间表示出来.

- (1) $\{x|x\geq -1\} = [-1, +\infty)$;
 (2) $\{x|-2\leq x\leq 2\} = [-2, 2]$;
 (3) $\{y|y=\frac{1}{x}\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

答案 (1) $[-1, +\infty)$; (2) $[-2, 2]$; (3) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

例 2.

练习 下列四种说法中, 不正确的一个是 ()

- A. 在函数值域中的每一个数, 在定义域中都至少有一个数与之对应
 B. 函数的定义域和值域一定是无限集合
 C. 定义域和对应关系确定后, 函数的值域也就确定了
 D. 若函数的定义域中只含有一个元素, 则值域也只含有一个元素

答案 B

解析 因为函数的定义域和值域可以是有限集

例 3.

练习 下列对应 f 是从集合 A 到集合 B 的函数有 _____ 个.

- ① $A=\mathbb{N}$, $B=\mathbb{N}^*$, $f: x\rightarrow y=|x-2|$;
 ② $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\mathbb{R}$, $f(1)=f(2)=3$, $f(3)=4$;
 ③ $A=[-1, 1]$, $B=\{0\}$, $f: x\rightarrow y=0$.

答案 2

解析: ①中 A 取 2 时, $y=0$ 不属于集合 B. ∴ ①不是集合 A 到集合 B 的函数,

②③是集合 A 到集合 B 的函数. ∴ 有 2 个

例 4.

练习 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 M, $g(x) = \sqrt{x+2}$ 的定义域为 N, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. $[-2, +\infty)$ B. $[-2, 2)$ C. $(-2, 2)$ D. $(-\infty, 2)$

答案 B

解析: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x < 2\}$, $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \geq -2\}$.

从而 $M = \{x | x < 2\}$, $N = \{x | x \geq -2\}$, 所以 $M \cap N = \{x | -2 \leq x < 2\}$.

即 $M \cap N = [-2, 2)$.

考点 函数的定义域

例 5.

练习 已知函数 $f(x) = 2x - 1$, 则 $f(x+1)$ 等于 ()

- A. $2x - 1$ B. $x + 1$ C. $2x + 1$ D. 1

答案 C

解析 $\therefore f(x) = 2x - 1 \therefore f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x + 2 - 1 = 2x + 1$

例 6.

练习 下列各组函数表示同一函数的是 ()

- A. $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ 与 $y = x + 3$ B. $y = \sqrt{x^2} - 1$ 与 $y = x - 1$
C. $y = x^0 (x \neq 0)$ 与 $y = 1 (x \neq 0)$ D. $y = 2x + 1, x \in \mathbb{Z}$ 与 $y = 2x - 1, x \in \mathbb{Z}$

答案 C

解析 : A 项中两函数的定义域不同; B 项中对应关系不同;

D 项中也是两函数对应关系不同. 故选 C.

同步练习

第一节 函数的概念 (第 5 页)

1. 答案 A

解析: A 中一个 x 对应的 y 值不唯一.

2. 答案 B

3. 答案 A

解析 : $f(a) - f(-a) = 3a^2 - 1 - [3(-a)^2 - 1] = 0$.

4. 答案 D

5. 答案 D

解析: 由 $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 1-x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \geq -1, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 故定义域为 $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 故选 D.

6. 答案 $(\frac{1}{2}, +\infty)$

解析: 由题意 $3a-1 > a$, 则 $a > \frac{1}{2}$.

7. 答案 $(-3, 3]$

8. 答案 $(0, \frac{L}{2})$

解析: 根据题意知, 矩形的另一边长为 $\frac{L-2x}{2} = \frac{L}{2} - x$

由 $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{L}{2} - x \geq 0 \end{cases}$ 得 $0 \leq x < \frac{L}{2}$, 故这个函数定义域为 $(0, \frac{L}{2})$

9. 解析: (1) 不在 $\because \frac{3+2}{3-6} = \frac{5}{-3} \neq 14$

(2) -3 $\because g(4) = \frac{4+2}{4-6} = -3$

(3) 14 令 $\frac{x+2}{x-6} = 2$ 解得 $x = 14$

10. 解析: $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | x < a\}$.

(1) 若 $B \subseteq A$, 则 $a \leq 3$, $\therefore a$ 的取值范围是 $\{a | a \leq 3\}$;

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $a \geq 3$, $\therefore a$ 的取值范围是 $\{a | a \geq 3\}$.

第二节 简单的分段函数与简单应用 (第 7 页)

真题重现

(2014) 1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f[f(3)] = \underline{\hspace{2cm}}$

答案 1

(2015) 2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+4), & x \geq 0 \\ x(x-4), & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案 21

典例精析

例 1.

练习 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$ 则 $f(\sqrt{2}) = (\quad)$

A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

答案 B

解析: $\because \sqrt{2} > 0$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$ 故选 B.

例 2.

练习 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ x+1, & x < 1 \end{cases}$ 则 $g(f(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案 3

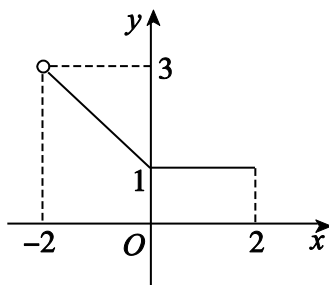
解析: 由题意, 得 $f(-2) = (-2)^2 = 4$, $g(f(-2)) = g(4) = 3$.

例 3.

练习 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1-x, & -2 < x < 0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域 $\underline{\hspace{2cm}}$

答案 $[1, 3)$

解析: $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象如图所示: 由图象知, $f(x)$ 在 $(-2, 2]$ 上的值域为 $[1, 3)$.



例 4.

练习 已知 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值是 ()

- A. 1 B. 1 或 $\frac{3}{2}$ C. 1, $\frac{3}{2}$ 或 $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

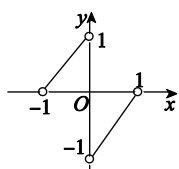
答案 D

解析: 该分段函数的三段各自值域为 $(-\infty, 1], [0, 4), [4, +\infty)$, 而 $3 \in [0, 4)$

$$\therefore f(x) = x^2 = 3, x = \pm\sqrt{3}, \text{ 而 } -1 < x < 2, \therefore x = \sqrt{3};$$

例 5

练习 已知函数 $f(x)$ 的图象是两条线段 (如图所示, 不含端点), 则 $f\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ 等于 ()



- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

答案 B

解析: 由图可知, 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 < x < 1, \\ x+1, & -1 < x < 0, \end{cases}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}, \therefore f\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}, \text{ 故选 B.}$$

同步练习

第二节 简单的分段函数与简单应用 (第 6 页)

1. 答案 D

2. 答案 C 解析: $\because 5 < 10, \therefore f(5) = \frac{5^2 - 1}{2} = 12$

3. 答案 C

解析: $f\{f[f(-1)]\} = f[f(0)] = f(\pi) = \pi + 1$, 故选择 C.

4. 答案 B

解析: 当 $a \leq 0$ 时, $f(a) = -a = 4, \therefore a = -4$; 当 $a > 0$ 时, $f(a) = a^2 = 4$,

$\therefore a=2$ 或 -2 (舍去), 故选 B.

5. 答案 4

6. 答案 4

解析: $\frac{1}{2}a - 1 = 1, a = 4 \geq 0 \therefore a = 4; \frac{1}{a} = 1, a = 1$ 不满足小于 0 $\therefore a = 4$

7. 答案 2 或 $-\frac{5}{2}$

解析: $f(x) = 5 \therefore \begin{cases} x^2 + 1 = 5 \\ x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2x = 5 \\ x < 0 \end{cases}$, 解方程得 x 的值为 2 或 $-\frac{5}{2}$

8. 答案 (1) 2 (2) $f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$

解析: (1) 直接由图中观察, 可得 $f[f(0)] = f(4) = 2$.

(2) 设线段 AB 所对应的函数解析式为 $y = kx + b$,

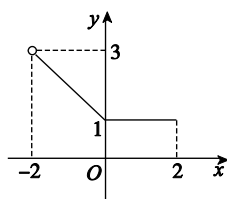
将 $\begin{cases} x=0, \\ y=4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=2, \\ y=0 \end{cases}$ 代入, 得 $\begin{cases} 4 = b, \\ 0 = 2k + b. \end{cases} \therefore \begin{cases} b=4, \\ k=-2. \end{cases} \therefore y = -2x + 4 (0 \leq x \leq 2).$

同理, 线段 BC 所对应的函数解析式为 $y = x - 2 (2 < x \leq 6)$ 故 $f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$

9. 解析: (1) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 1 + \frac{x-x}{2} = 1$, 当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) = 1 + \frac{-x-x}{2} = 1 - x$.

$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1 - x, & -2 < x < 0. \end{cases}$

(2) 函数 $f(x)$ 的图象如图所示:



(3) 由(2)知, $f(x)$ 在 $(-2, 2]$ 上的值域为 $[1, 3)$.

第三节 函数的单调性 (第8页)

真题重现

(2015) 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数, 且不等式 $f(m+2x) < f(x^2)$ 对 $x \in R$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

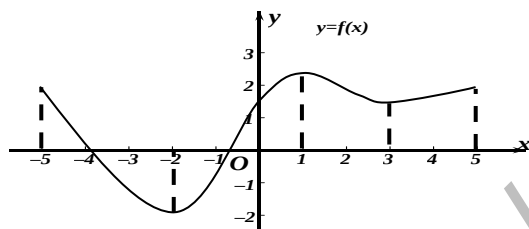
答案 A

典例精析

例 1.

练习 下图是定义在区间 $[-5, 5]$ 上的函数 $y = f(x)$, 根据函数图象说出函数的单调区间,

以及在每一单调区间上, 它是增函数还是减函数?



解析: $f(x)$ 在区间 $(-2, 1), (3, 5)$ 上单调递增,

$f(x)$ 在区间 $(-5, -2), (1, 3)$ 上单调递减.

例 2.

练习 求证: 函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

证明: 在区间 $(0, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 值,

$$\text{当 } x_1 < x_2 \text{ 时, } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} > 0$$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$. $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

例 3.

练习 已知函数 $y = ax$ 和 $y = -\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数, 则函数 $f(x) = bx + a$ 在 R 上是 ()

- A. 减函数且 $f(0) < 0$ B. 增函数且 $f(0) < 0$
C. 减函数且 $f(0) > 0$ D. 增函数且 $f(0) > 0$

答案 A

解析: $\because y=ax$ 和 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 都是减函数, $\therefore a<0, b<0, f(x)=bx+a$ 为减函数

且 $f(0)=a<0$, 故选 A.

例 4.

练习 求函数 $y=x^2+2x+3$ 的单调区间.

答案 增区间 $[-1, +\infty)$ 减区间 $(-\infty, -1]$

解析: $\because y=(x+1)^2+2$ 抛物线开口向上, 对称轴 $x=-1$

$\therefore$ 函数在 $(-\infty, -1]$ 上是减函数, 函数在 $[-1, +\infty)$ 上是增函数.

例 5.

练习 函数 $f(x)=2x^2-mx+3$, 当 $x\in[2, +\infty)$ 时是增函数, 当 $x\in(-\infty, 2]$ 时是减函数,

则 $f(1)=$ ____

答案 -3

解析: $f(x)=2(x-\frac{m}{4})^2+3-\frac{m^2}{8}$, 由题意 $\frac{m}{4}=2, \therefore m=8$.

$\therefore f(1)=2\times 1^2-8\times 1+3=-3$.

例 6.

练习 函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 且 $f(2m)>f(-m+9)$, 则实数 m 的取值范围是()

A. $(-\infty, 3)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$

答案 A

解析: 因为函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 且 $f(2m)>f(-m+9)$, 所以 $2m<-m+9$, 即 $m<3$.

同步练习

第三节 函数的单调性 (第 7 页)

1. 答案 A

解析: 由题意知 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上是增函数, 因为 $x_2>x_1$, 对应的 $f(x_2)>f(x_1)$.

2. 答案 A

解析: $\because$ 一次函数 $y=-6x+10$ 中, $k=-6<0$, $\therefore$ 函数为减函数

3. 答案 C

解析: 如图所示, 该函数的对称轴为 $x=3$, 根据图象可知函数在 $(2, 4)$ 上是先递减再递增的.

4. 答案 D

解析: 该函数的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, 该函数在区间 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上是增函数

5. 答案 B

解析: 由题意可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 结合四个选项可知 B 正确.

6. 答案 $m > 0$

解析: 由 $f(m-1) > f(2m-1)$ 且 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数得 $m-1 < 2m-1$, $\therefore m > 0$.

7. 答案 $(0, 1) (4, 5)$, $(-1, 0) (2, 4)$

8. 答案 减函数

9. 解析: $\because f(x) = -(x-a)^2 + a^2$, 抛物线开口向下, 对称轴 $x=a$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减. $\therefore$ 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数; $\therefore a \leq 1$

又 $\because g(x) = \frac{a}{x+1}$, 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数,

$\therefore [1, 2] \subseteq (-1, +\infty) \quad \therefore a > 0$

综上 a 的取值范围是 $0 < a \leq 1$.

10. 解析: 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=a$,

画出草图如图所示. 由于图象可知函数在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

因此要使函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 只需 $[1, 2] \subseteq [a, +\infty)$

$\therefore a \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增;

第四节 函数的奇偶性 (第 10 页)

真题重现

(2016) 下列函数为偶函数的是 (D)

- A. $y = e^x$ B. $y = \log_2 x$ C. $y = \sqrt{x}$ D. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

答案 D

典例精析

例 1

练习 下列函数为偶函数的是 ()

- A. $y = |x|$ B. $y = 3 - x$ C. $y = \frac{1}{x^3}$ D. $y = -x^2 + x + 14$

答案 A

解析: A. $y = |x|$ 是偶函数, B. $y = 3 - x$ 是非奇非偶函数,

C. $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数,

D. $y = -x^2 + x + 14$ 是非奇非偶函数, 故选: A

例 2.

练习 下列函数是奇函数的是 (D)

- A. $y = |x + 1|$ B. $y = \sqrt{x}$ C. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ D. $y = \frac{1}{x}$

答案 D

解析: A. 函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数

B. 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 不关于原点对称, 函数为非奇非偶函数.

C. $f(-x) = 2^x + 2^{-x} = f(x)$, 则函数为偶函数.

D. $f(-x) = -f(x)$ 满足条件故选: D

例 3.

练习 若 $f(x) = x^2 + bx$ ($x \in \mathbb{R}$) 为偶函数, 则 $b =$ _____.

答案 0

解析: 函数为偶函数, 所以满足

$$f(-x) = f(x) \therefore (-x)^2 + b(-x) = x^2 + bx \therefore b = 0$$

例 4.

练习 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ，则 $f(-1) = (\quad)$

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

答案 A

解析： $f(-1) = -f(1) = -2$.

例 5.

练习 下列函数中，既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 单调递增的函数是 $(\quad)$

- A. $y = x^3$ B. $y = |x| + 1$ C. $y = -x^2 + 1$ D. $y = 2^{-|x|}$

答案 B

解析：因为 A 项是奇函数，C、D 项中函数在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，只有 B 项是正确的，

例 6.

练习 已知奇函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数，则满足 $f(x+1) + f(x) \leq 0$ 的 x 取值范围是_____

答案 $x \leq -\frac{1}{2}$

解析：根据已知奇函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数，

不等式化为： $f(x+1) \leq -f(x) = f(-x)$

$\therefore x+1 \leq -x \quad \therefore x \leq -\frac{1}{2}$

同步练习

第四节 函数的奇偶性（第 8 页）

1. 答案 D

解析： $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $[-5, 5]$ 上是偶函数，

$\therefore f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(-4) = f(4) = 2$.

2. 答案 D

解析： $\because$ 函数 $y = \frac{x^2(x+1)}{x+1}$ 的定义域为 $\{x | x \neq -1\}$ ，不关于原点对称，

$\therefore$ 此函数既不是奇函数又不是偶函数，

3. 答案 C

解析: $\because f(x) = \frac{1}{x} - x (x \neq 0)$, $\therefore f(-x) = -\frac{1}{x} + x = -f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的图象关于原点对称.

4. 答案 C

解析: $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x) \cdot f(-x) = -[f(x)]^2$.

又 $\because f(0) = 0$, $\therefore -[f(x)]^2 \leq 0$.

5. 答案 D

解析: 由函数奇、偶性的定义知 D 项正确, 故选 D.

6. 答案 -2

解析: $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,

$$\therefore f(-3) = -f(3) = 2, \therefore f(3) = -2$$

7. 答案 -1

解析: 函数为奇函数, 所以满足

$$f(-1) = -f(1) \therefore \frac{-1-1}{-1} + a = -\frac{1-1}{1} - a \therefore a = -1$$

8. 答案: -3

解析: $\because$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x + 1$, $\therefore f(2) = -3$

$\because f(x)$ 为偶函数, $f(-x) = f(x)$, $\therefore f(-2) = f(2) = -3$

9. (1) 解: 定义域: $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 1$ 关于原点非对称区间

$\therefore$ 此函数为非奇非偶函数

(2) 解: 定义域: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \therefore$ 定义域为 $x = \pm 1$

$$f(-x) = \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{1 - x^2} = f(x) \quad \text{且} \quad f(\pm 1) = 0$$

$\therefore$ 此函数为既是奇函数又是偶函数

(3) 解: 显然定义域关于原点对称

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } -x < 0 \quad f(-x) = x^2 - x = -(x - x^2)$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } -x > 0 \quad f(-x) = -x - x^2 = -(x^2 + x)$$

$$\text{即: } f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x) & (x < 0) \\ -(x - x^2) & (x > 0) \end{cases} = -f(x)$$

$\therefore$ 此函数为奇函数

10. 解析: (1) $\because y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$

(2) 令 $x<0$, 则 $-x>0$,

$\therefore f(-x)=(-x)^2+2x=x^2+2x$. 又 $\because f(x)$ 为奇函数,

$\therefore f(x)=-f(-x)=-x^2-2x$,

第五节 函数的图象与性质 (第 12 页)

典例精析

例 1

练习 画出下列函数的图象.

$$(1) y=2x-1, x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2; \quad (2) y=x^2-2x (|x| > 1); \quad (3) f(x)=|x-1|;$$

答案: 略

例 2

练习 画出函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象, 并根据平移变换得到 $y=f(x-1)+2$ 的图象.

解析: $y=f(x-1)+2$ 的图象是由 $f(x)=\frac{1}{x}$ 图象 (双曲线) 先向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位

得到

例 3

练习 函数 $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ 图象的对称中心的坐标是_____

答案 (2, 1)

解析: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-2+3}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$

例 4

练习 作出函数 $y=\frac{1}{|x|}$ 的图象, 并根据图象说出函数的单调区间,

解析: $\because y=\frac{1}{|x|}$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称,

函数的单调减区间为 $[0, +\infty)$, 单调增区间为 $(-\infty, 0]$

同步练习

第五节 函数的图象与性质 (第 9 页)

1. 答案 C

解析: 有可能是没有交点的, 如果有交点, 那么对于 $x=1$ 仅有一个函数值;

2. 答案 A

解析: 因为汽车先启动、再加速、到匀速、最后减速, s 随 t 的变化是先慢、再快、到匀速、最后慢, 故 A 图比较符合题意.

3. 答案 B

解析：由图表可知 $f(-1) = -1$, $g(3) = -4$, 所以 $g(3) - f(-1) = -4 - (-1) = -3$. 所以 $f[g(3) - f(-1)] = f(-3) = 4$.

4. 答案 D

解析：由题意可知, 1, 2 是方程 $f(x) = 0$ 的两根.

$$\text{所以} \begin{cases} 1+2=-p, \\ 1 \times 2=q, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} p=-3, \\ q=2, \end{cases} \quad \text{所以 } f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$$\text{所以 } f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2 = 6.$$

5. 答案 C

解析：平移前的“1-x”，平移后的“-x=1-(x+1)”，

用“x+1”代替了“x”，即左移 1 个单位

6. 答案 (1) 4, 5, 6. (2) $f(x_1) > f(x_2)$

7. 答案 $a > 1$

解析：由题意, $f(1) < 0$ 且 $f(2) < 0 \therefore \begin{cases} 2-3a+a\pi < 0 \\ 4-6a+a\pi < 0 \end{cases} \therefore a > 1$

8. 答案 ④

9. 答案 19 kg

解析：由题图知函数的图象是一条直线，可以用一次函数表示，设为 $y = kx + b$,

将点 (30, 330), (40, 630) 代入得 $k = 30$, $b = -570$, 故 $y = 30x - 570$, 令 $y = 0$ 得 $x = 19$.

答：乘客免费可携带行李的最大重量为 19 kg

10. 答案 $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

解析：由题意知 $\frac{2}{2a+b} = 1$, ①由 $f(x) = x$ 得 $ax^2 + (b-1)x = 0$.

方程 $ax^2 + (b-1)x = 0$ 有唯一解, 则 $b-1=0$, 所以 $b=1$,

将 $b=1$ 代入①得 $a = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = \frac{2x}{x+2}$.

第六节 简单的指数运算 (第 14 页)

典例精析

例 1

练习 已知 $x^4 = 16$, 则 x 等于()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\sqrt[4]{16}$

答案 C

解析: 由 $x^4 = 16$ 可知 $x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$.

例 2.

练习 $5^{\frac{3}{2}}$ 将写成根式, 正确的是()

- A. $\sqrt[3]{5^2}$ B. $\sqrt[3]{3^5}$ C. $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ D. $\sqrt{5^3}$

答案 D

解析: 由 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 可知, $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$.

例 3.

练习 使代数式 $(x-1)^{-\frac{1}{3}}$ 有意义的 x 的取值范围是()

- A. $x \geq 1$ B. $x < 1$ C. $x > 1$ D. $x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq 1$

答案 D

解析: $(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$, $\therefore x-1 \neq 0$,

即 $x \neq 1$. $\therefore x$ 的取值范围是 $x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq 1$.

例 4.

练习 $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ 等于()

- A. $-\sqrt{-a}$ B. $-\sqrt{a}$ C. $\sqrt{-a}$ D. $\sqrt{a}$

答案 D

解析: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

同步练习

第六节 简单的指数运算 P11

1. 答案 D

解析: 由 $x^2=6$ 可知 $x=\pm\sqrt{6}$.

2. 答案 B

解析: $\because \sqrt[n]{m}=m^{\frac{1}{n}}$ 故选 B.

3. 答案 D

解析: 由 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 可知, $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt{5^3}$.

4. 答案 B

解析: $\because a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $\therefore 8^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. 答案 C

解析: $(x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\therefore x-1>0$,

即 $x>1$. $\therefore x$ 的取值范围是 $x>1$

6. 答案 A

解析: 根据指数幂的运算法则计算即可求出答案.

若 $4^a \cdot 2^b = \frac{1}{2}$, 则 $2^{2a} \cdot 2^b = 2^{2a+b} = 2^{-1}$, 则 $2a+b = -1$,

故选: A

7. 答案 9

解析: $\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 3 \times 3 = 9$

8. 答案 $\frac{5}{3}$

解析: $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} = \frac{5}{3}$

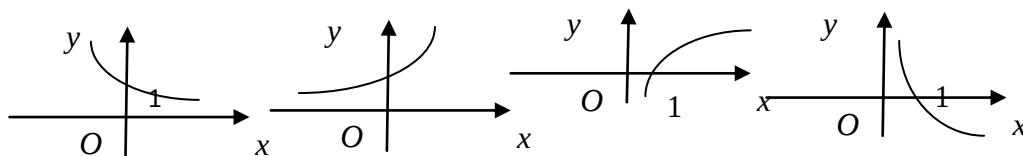
9. 解析: $10^{3a-2b+c} = \frac{10^{3a} \cdot 10^c}{10^{2b}} = \frac{(10^a)^3 \cdot 10^c}{(10^b)^2} = \frac{2^3 \times 3}{5^2} = \frac{24}{25}$

10. 解析: $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{a^{(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})}} = a^{(2-\frac{5}{4})} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

第七节 指数函数及其性质 (第 15 页)

真题重现

(2014 年) 函数 $f(x) = 2^x$ 的图象大致为 ()



A.

B.

C.

D.

答案 B

典例解析

例 1

练习 若 $y = (a-3) \cdot (a-2)^x$ 是指数函数, 则 $a = \underline{\quad}$.

答案 4

解析: 由题意可知 $\begin{cases} a-3=1, \\ a-2>0 \text{ 且 } a-2 \neq 1, \end{cases}$ 解得 $a=4$.

例 2

练习 给出函数 $f(x) = a^{2x-1} + 2$ (a 为常数, 且 $a > 0$, $a \neq 1$), 无论 a 取何值,

函数 $f(x)$ 恒过定点 P , 则 P 的坐标是 ()

A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(1, 3)$ D. $(\frac{1}{2}, 3)$

答案 D

解析: $\because a^0 = 1 \therefore$ 令 $2x-1=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$, $y=1+2=3$. 故点的坐标为 $(\frac{1}{2}, 3)$

例 3.

练习 已知 $(\frac{1}{\pi})^a \phi (\frac{1}{\pi})^b$, 则 a, b 的大小关系是 ()

A. $1 > a > b > 0$ B. $a < b$ C. $a > b$ D. $1 > b > a > 0$

答案 B

解析: $\because 0 < \frac{1}{\pi} < 1$, 故 $y = (\frac{1}{\pi})^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数,

又 $(\frac{1}{\pi})^a < (\frac{1}{\pi})^b$, 故 $a < b$.

例 4.

练习 若 $(\frac{1}{4})^x \geq 1$, 则 x 的取值范围是_____

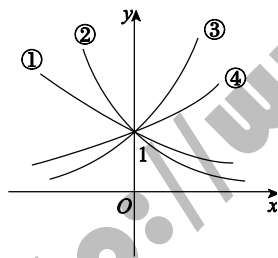
答案 $x \geq 0$

解析: $\because (\frac{1}{4})^x \geq 1 = (\frac{1}{4})^0$,

$\because y = (\frac{1}{4})^x$ 是减函数 $\therefore x \geq 0$.

例 5.

练习 如图是指数函数① $y=a^x$, ② $y=b^x$, ③ $y=c^x$, ④ $y=d^x$ 的图象, 则 a, b, c, d 的大小关系是 ()

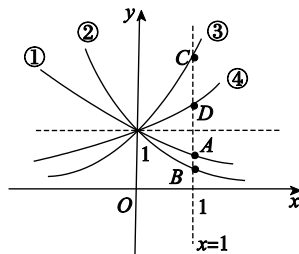


- A. $a < b < 1 < c < d$ B. $b < a < 1 < d < c$
C. $1 < a < b < c < d$ D. $a < b < 1 < d < c$

答案 B

解析: 方法一: 在①②中底数小于1且大于零, 在 y 轴右边, 底数越小, 图象向下越靠近 x 轴, 故有 $b < a$, 在③④中底数大于1, 在 y 轴右边, 底数越大, 图象向上越靠近 y 轴, 故有 $d < c$. 故选 B.

方法二: 作直线 $x=1$, 与四个图象分别交于 A, B, C, D 四点, 由于 $x=1$ 代入各个函数可得函数值等于底数的大小, 所以四个交点的纵坐标越大, 则底数越大, 由图可知 $b < a < 1 < d < c$, 故选 B.



同步练习

第七节 指数函数及其性质 (第 12 页)

1. 答案 B

解析: $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$, $f(f(-1))=f(\frac{1}{2})=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

2. 答案 C

解析: $\because \pi > 1$, 故 $y = \pi^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 故 $a > b$.

3. 答案 A

解析: 由 $f(2)=4$ 得 $a^2=4$, 又 $\because a > 0$, $\therefore a=2$, $f(x)=2^x$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $-1 > -2$ 故选 A.

4. 答案 B

解析: 令 $x+1=0$ 得, $x=-1$, 代入数 $y=a^0=1$,

$\therefore$ 函数 $y=a^{x+1}$ 的图象一定过点 $(-1, 1)$, 故选 B.

5. 答案 A

解析: 由题意, 自变量 x 应满足 $\begin{cases} 1-2^x \geq 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \leq 0, \\ x > -3, \end{cases}$

$\therefore -3 < x \leq 0$.

6. 答案 $m < n$

解析: $\because 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, $\therefore f(x)=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

又 $f(m) > f(n)$, 故 $m < n$.

7. 答案 (1, 2)

解析: 由题意可知, 函数 $y=(a-1)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

故 $0 < a-1 < 1$, 即 $1 < a < 2$.

8. 答案 $(1, +\infty)$

解析: 由题意和指数函数的性质列出不等式, 因为当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) = (2a-1)^x$ 的值恒大于 1,

即 $(2a-1)^x \neq 1 = (2a-1)^0 \therefore f(x) = (2a-1)^x$ 为增函数

所以 $2a-1 > 1$, 解得 $a > 1$, 则实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$,

9. 解析: 设原来污垢为 1 个单位, 则经过第一次漂洗, 存留量为原来的 $\frac{1}{4}$; 经过第二次漂洗, 存留量为

第一次漂洗后的 $\frac{1}{4}$, 也就是原来的 $(\frac{1}{4})^2$; 经过第三次漂洗, 存留量为原来的 $(\frac{1}{4})^3$, ..., 经过第 x

次漂洗, 存留量为原来的 $(\frac{1}{4})^x$, 故解析式为 $y = (\frac{1}{4})^x$, 由题意, $(\frac{1}{4})^x \leq \frac{1}{100}$, $4^x \geq 100$,

$(2^x)^2 \geq 10^2, 2^x \geq 10 > 2^3, \therefore x \geq 4$, 即至少漂洗 4 次.

10. 解析: (1) 因为函数图象过点 $(2, \frac{1}{2})$ 所以 $a^{2-1} = \frac{1}{2}$, 则 $a = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-1} (x \geq 0)$,

由 $x \geq 0$, 得 $x-1 \geq -1$, 于是 $0 < (\frac{1}{2})^{x-1} \leq (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

所以所求函数的值域为 $(0, 2]$.

第八节 简单的对数运算 (第 17 页)

真题重现

(2014) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f[f(3)] = \underline{\quad 1 \quad}$

答案 1

典例解析

例 1

练习 若 $\log_2 x = 3$, 则 x 等于()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 9 D. 8

答案 D

解析: $\because \log_2 x = 3, \therefore x = 2^3 = 8$.

例 2

练习 若 $\log_3(\frac{1-2x}{9}) = 0$, 则 $x = \underline{\quad -4 \quad}$.

答案 -4

解析: $\because \frac{1-2x}{9} = 1 \therefore 1-2x=9 \therefore x=-4$

例 3

练习 求下列各对数的值 (1) $\log_{27} 9 = \underline{\quad \frac{2}{3} \quad}$ (2) $\log_3 \frac{1}{27} = \underline{\quad -3 \quad}$ (3) $\log_{32} 4 = \underline{\quad \frac{2}{5} \quad}$

答案 (1) $\frac{2}{3}$ (2) -3 (3) $\frac{2}{5}$

解析: (1) $\because \log_{27} 9 = \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3}, \therefore x = \frac{2}{3}$.

(2) $\log_3 3^{-3} = -3$, 或 $\log_3 \frac{1}{27} = x, 3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3} \therefore x = -3$

$$(3) \log_{32} 4 = x, 32^x = 4, 2^{5x} = 2^2 \therefore 5x = 2 \therefore x = \frac{2}{5}$$

例 4

练习 方程 $3^{\log_2 x} = 1$ 的解是_____

答案 $x=1$

解析 $\because 3^0 = 1, \therefore \log_2 x = 0, \therefore x = 1$

例 5

练习 计算下列各式的值 (1) $\log_2 6 - \log_2 3 =$ ____ (2) $2\log_5 25 + 3\log_2 64 =$ ____ (3) $\lg 4 + 2\lg 5 =$ ____

答案 (1) 1 (2) 16 (3) 2

解析 (1) $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$

(2) $\log_5 25^2 + \log_2 64^3 = \log_5 5^4 + \log_2 2^{12} = 4 + 12 = 16$

(3) $\lg 4 + \lg 25 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2$

同步练习

第八节 简单的对数运算 (第 13 页)

1. 答案 C

解析: $\because \log_3 x = 2, \therefore x = 3^2 = 9,$

2. 答案 B

解析: $\because 2^{\log_3 x} = 1 = 2^0, \therefore \log_3 x = 0,$
 $\therefore x = 3^0 = 1,$ 故选 B.

3. 答案 C

解析: $\because 2x - 1 = 1 \therefore x = 1$

4. 答案 B

解析: 设 $\log_2 32 = x,$ 则 $2^x = 32 = 2^5, \therefore x = 5.$

5. 答案 B

解析: 因为 $P = \log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 4 = 2$

$Q = \lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1, M = e^0 = 1, N = \ln 1 = 0,$

所以 $Q = M.$

6. 答案 $a < 5$

解析: $5 - a > 0 \therefore a < 5$

7. 答案 64

解析: $\because \log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0 \therefore \log_3 (\log_4 x) = 1 \therefore \log_4 x = 3 \therefore x = 4^3 = 64$

8. 答案 1

解析: $\because (\lg 5)^2 + \lg 2 \times (\lg 25 \times 2) = (\lg 5)^2 + \lg 2 \times (\lg 25 + \lg 2)$
 $= (\lg 5)^2 + \lg 2 \times \lg 25 + (\lg 2)^2 = (\lg 5)^2 + 2\lg 2 \times \lg 5 + (\lg 2)^2$
 $= (\lg 5 + \lg 2)^2 = 1$

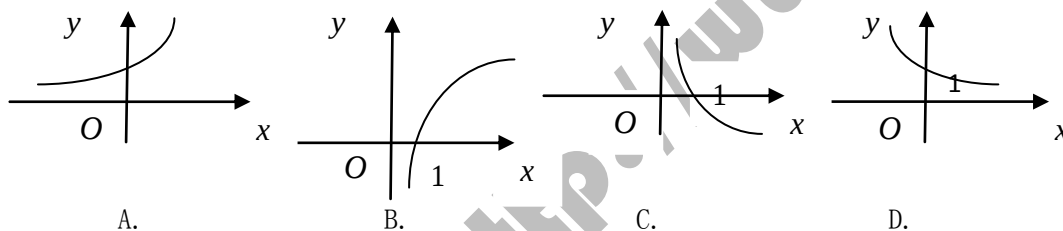
9. 解析: 原式 $= 4\lg 2 + 3\lg 5 - (\lg 1 - \lg 5) = 4\lg 2 + 4\lg 5$
 $= 4(\lg 2 + \lg 5) = 4\lg 10 = 4.$

10. 解析: 原式 $= \lg 5(3\lg 2 + 3) + 3(\lg 2)^2 - \lg 6 + \lg 6 - 2$
 $= 3\lg 5 \cdot \lg 2 + 3\lg 5 + 3(\lg 2)^2 - 2$
 $= 3\lg 2(\lg 5 + \lg 2) + 3\lg 5 - 2$
 $= 3\lg 2 + 3\lg 5 - 2 = 3(\lg 2 + \lg 5) - 2 = 1.$

第九节 对数函数及其性质 (第 18 页)

真题重现

(2015) 函数 $f(x) = \log_2 x$ 的图象大致为 ()



答案 B

(2016) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}, & x \geq 1, \\ \log(1-x), & x < 1, \end{cases}$ 若 $f(a) + f(1) = 0$, 则实数 a 的值等于 _____

答案 $\frac{1}{2}$

解析: $\because f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \therefore f(a) = -1$ 又 $\because 2^{x-1} > 0 \therefore \log_2(1-a) = -1$

$$\therefore 1-a = 2^{-1} \therefore a = \frac{1}{2}$$

典例解析

例 1

练习 已知 $f(x) = \log_{0.5} x$, $x \in [-1, 1]$, 则 $f(x)$ 的值域为 _____

答案 $[0, 2]$

解析 $\ominus f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 是 $[-1, 1]$ 上的减函数, $\therefore f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2$$

例 2.

练习 解下列对数不等式 (1) $\log_5 x < \log_5 3$ (2) $\log_2 x > 3$ (3) $\log_{\frac{1}{3}} x \neq 0$

解析 (1) $(0, 3)$ (2) $(8, +\infty)$ (3) $(0, 1)$

例 3

练习 求函数 $y = \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{x - 1}$ 的定义域 _____

答案 $(0, 1) \cup (1, e]$

例 4.

练习 已知 $\log_{\frac{1}{2}} b < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} c$, 则 ()

- A. $2^a > 2^b > 2^c$ B. $2^b > 2^a > 2^c$ C. $2^c > 2^b > 2^a$ D. $2^c > 2^a > 2^b$

答案 B

解析: 由于函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 为减函数,

因此由 $\log_{\frac{1}{2}} b < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} c$ 可得 $b > a > c$,

又由于函数 $y = 2^x$ 为增函数, 所以 $2^b > 2^a > 2^c$.

例 5

练习 已知函数 $f(x) = 2 \log_2 x$ 的值域为 $[-1, 1]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$ B. $[-1, 1]$ C. $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ D. $\left[-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

答案 A

解析: 由已知得, $-\frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \frac{1}{2}$, $\therefore y = \log_2 x$ 为增函数

$\therefore 2^{-\frac{1}{2}} \leq x \leq 2^{\frac{1}{2}}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, 故选 A.

同步练习

第九节 对数函数及其性质 (第 14 页)

1. 答案 B

解析: $Q x-1>0 \Rightarrow x>1, \therefore B=\{x|x>1\} \therefore A \cap B=\{2,3\}$. 故 B 正确.

2. 答案 A

解析: 因为 $f(x)=\lg x$ 在 $[10, 100]$ 上是增函数.

所以 $\lg 10<\lg x \leq \lg 100^2$, 即 $1 \leq \lg x \leq 2$,

即 $f(x)$ 的值域为 $[1, 2]$

3. 答案 D

解析: A 选项, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0,1)$ 单调递增, 不正确;

B 选项, $y=\log_2(x+1)$ 在 $(0,1)$ 单调递增, 不正确;

C 选项, $y=2^{x+1}$ 在 $(0,1)$ 单调递增;

D 选项, $y=|x-1|$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 正确; 故选 D.

4. 答案 D

解析: A 中函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

B 中函数不是奇函数; C 中函数不是奇偶函数;

D 中函数既是奇函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的函数

5. 答案 B

解析: A. $y=2x$ 为奇函数;

B. $y=x^2$ 为偶函数, 即该选项正确;

C. 根据 $y=2^x$ 的图象知该函数非奇非偶;

D. 根据 $y=\log_2 x$ 的图象知该函数非奇非偶. 故选: B.

6. 答案 $0<a<1$

解析: $\because 2<3$ 但 $f(2)>f(3) \therefore f(x)=\log_a x$ 为减函数 $\therefore 0<a<1$

7. 答案 3

解析: 当 $a>1$ 时, $f(x)_{\max}=f(3)=\log_a 3=1, \therefore a=3$.

8. 答案 4

解析: $\because \log_2 x \leq 2 = \log_2 4 \therefore 0<x \leq 4, \therefore A=\{x|0<x \leq 4\}$ 又 $\because A \subseteq B, \therefore a>4, \therefore c=4$.

9. 解析: $\because a=\log_{0.4} 0.3 > \log_{0.4} 0.4 = 1 \quad 0 = \log_5 1 < b = \log_5 4 < \log_5 5 = 1$

$$C = \log_2 0.8 < \log_2 1 = 0 \quad \therefore a > 1, 0 < b < 1, c < 0 \quad \therefore c < b < a$$

10. 解 (1) 要使函数有意义, 则有 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$ 解之得: $-3 < x < 1$,

所以函数的定义域为 $(-3, 1)$.

(2) 函数可化为: $f(-1) = \log_a [(1+1)(-1+3)] = \log_a 4 = 2$

$$\therefore a^2 = 4, \therefore a > 0 \therefore a = 2.$$

第十节 幂函数 (第 20 页)

真题重现

(2014) 函数 $y = \sqrt{-x}$ 的定义域是 ()

- A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$ C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | x \leq 1\}$

答案 D

典例精析

例 1.

练习 下列所给出的函数中, 属于幂函数的是 ()

- A. $y = -x^3$ B. $y = x^{-3}$ C. $y = 2x^3$ D. $y = x^3 - 1$

答案 B

解析: 根据幂函数的定义: 形如 $y = x^a$ 的函数称为幂函数, 选项 B 中自变量 x 的系数是 1, 符合幂函数的定义, 所以 B 是幂函数.

例 2.

练习 若幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(2, \frac{1}{4}\right)$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 等于 ()

- A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

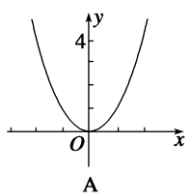
答案 A

解析: 设 $f(x) = x^a$, 则 $\frac{1}{4} = 2^a$, $\therefore a = -2$. $\therefore f(x) = x^{-2}$.

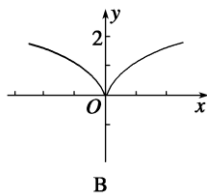
$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$$

例 3.

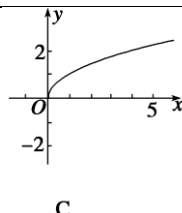
练习 下列是 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 的图象的是 ()



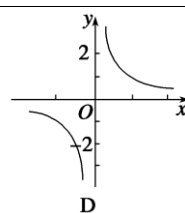
A



B



C



D

答案 B

解析: $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $\therefore x \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, $f(-x) = \sqrt[3]{-x^2} = \sqrt[3]{x^2}$
 $= f(x)$, 即 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 是偶函数, 又 $\because \frac{2}{3} < 1$, $\therefore$ 图象上凸.

例 4.

练习 设 $\alpha \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的所有 α 的值为()

- A. 1, 3 B. -1, 1 C. -1, 3 D. -1, 1, 3

答案 A

解析: 当 $\alpha = -1$ 时, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 定义域不是 $\mathbf{R}$;

当 $\alpha = 1, 3$ 时, 满足题意; 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 $[0, +\infty)$, 故选 A.

例 5.

练习 比较 $1.1^{\frac{1}{2}}$ 、 $1.4^{\frac{1}{2}}$ 、 $1.1^{\frac{1}{3}}$ 的大小, 并说明理由.

答案 $1.4^{\frac{1}{2}} > 1.1^{\frac{1}{2}} > 1.1^{\frac{1}{3}}$

解析: 考查函数 $y = 1.1^x$, $\because 1.1 > 1$, $\therefore$ 它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

又 $\because \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, $\therefore 1.1^{\frac{1}{2}} > 1.1^{\frac{1}{3}}$. 再考查函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$, $\because \frac{1}{2} > 0$, $\therefore$ 它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

又 $\because 1.4 > 1.1$, $\therefore 1.4^{\frac{1}{2}} > 1.1^{\frac{1}{2}}$, $\therefore 1.4^{\frac{1}{2}} > 1.1^{\frac{1}{2}} > 1.1^{\frac{1}{3}}$.

同步练习

第十节 幂函数 (第 15 页)

1. 答案 B

解析: 根据幂函数的定义: 形如 $y = x^\alpha$ 的函数称为幂函数,

选项 B 中自变量 x 的系数是 1, 符合幂函数的定义, 所以 B 是幂函数.

2. 答案 D

解析: 设幂函数为 $y=x^a$, 依题意, $4=(\frac{1}{2})^a$, 即 $2^2=2^{-a}$,

$\therefore a = -2$. $\therefore$ 幂函数为 $y=x^{-2}$,

$$\therefore f(8)=8^{-2}=\frac{1}{8^2}=\frac{1}{64}$$

3. 答案 D

解析: 根据常见五种幂函数的图象在第一象限的特点,

$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象在 $(0, 1]$ 上图象在 $y=x$ 的上方,

在 $(1, +\infty)$ 上图象在 $y=x$ 的下方, 故选 D.

4. 答案 D

解析: A 项中定义域值域都是 $\mathbf{R}$;

B 项中定义域值域都是 $(0, +\infty)$;

C 项中定义域值域都是 $\mathbf{R}$;

D 项中定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $[0, +\infty)$, 故选 D.

5. 答案 B

解析: $\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, $\therefore 3m-5 < 0 (m \in \mathbf{N})$, 则 $m=0$ 或 $m=1$,

当 $m=0$ 时, $f(x)=x^{-5}$ 是奇函数, 不合题意

当 $m=1$ 时, $f(x)=x^{-2}$ 是偶函数, 因此 $m=1$, 故选 B.

6. 答案 ④

解析: 当 $a=0$ 时, 函数 $y=x^a$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 故①不正确; 当 $a < 0$ 时,

函数 $y=x^a$ 的图象不过 $(0, 0)$ 点, 故②不正确; 幂函数 $y=x^{-1}$ 的图象关于原点对称,

但其在定义域内不是增函数, 故③不正确. ④正确.

7. 答案 $(0, +\infty)$

解析: $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, $y=x^{-1}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
再取交集.

8. 答案 $\frac{1}{3}$

解析: 设 $f(x)=x^a$ (a 是常数), 因为 $y=f(x)$ 的图象经过点 $(2, -\frac{1}{8})$

所以 $(-2)^a = -\frac{1}{8} = (-2)^{-3}$, 解得 $a = -3$, 所以 $f(x)=x^{-3}$.

从而有 $x^{-3}=27=3^3$, 解得 $x^{-1}=3$, $\therefore x=\frac{1}{3}$

9. 解析: 由题意, 得 $3m-7 < 0$. $\therefore m < \frac{7}{3}$. $\because m \in \mathbb{N}$, $\therefore m=0, 1$ 或 2 ,

$\because$ 幂函数的图象关于 y 轴对称, $\therefore 3m-7$ 为偶数.

$\because m=0$ 时, $3m-7=-7$,

$m=1$ 时, $3m-7=-4$, $m=2$ 时, $3m-7=-1$.

故当 $m=1$ 时, $y=x^{-4}$ 符合题意. 即 $y=x^{-4}$.

9. 解析: $\because f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

又 $f(a+1) < f(10-2a)$,

$$\therefore \begin{cases} a+1 > 0, \\ 10-2a > 0, \\ a+1 > 10-2a \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a > -1, \\ a < 5, \\ a > 3. \end{cases}$$

$\therefore 3 < a < 5$.

第十一节 函数的零点 (第 22 页)

真题重现

(2014) 函数 $f(x) = e^x + 4x - 7 (e \approx 2.71828)$ 的零点所在的区间是 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

答案 C

(2015) 函数 $f(x) = 2^x + x$ 的零点所在的区间是 ()

答案 B

典例精析

例 1

练习 下列函数图象与 x 轴没有交点的是 ()

- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = \sqrt{x}$ C. $f(x) = \frac{1}{x}$ D. $f(x) = x^3$

答案 C

解析: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 中, 对任意自变量 x 的值, 均有 $\frac{1}{x} \neq 0$, 故该函数不存在零点.

例 2.

练习 若函数 $f(x) = ax - 2$ ($a \neq 0$) 有一个零点为 2, 那么函数 $g(x) = x^2 - ax$ 的零点是()

- A. 0, 1 B. $0, \frac{1}{2}$ C. 0, 2 D. $2, \frac{1}{2}$

答案 A

解析: $\because a \neq 0, 2a - 2 = 0, \therefore a = 1.$ 令 $x^2 - ax = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = a = 1$.

例 3

练习 函数 $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ 的零点个数是()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无法确定

答案 A

解析: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$, 即方程 $2x^2 - 3x + 2 = 0$ 没有实数根,

则对应函数的零点个数为 0 个.

例 4.

练习 已知函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的, 有如下 $x, f(x)$ 的对应值表:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	10	-7	6	-4	-5

则函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 6]$ 上的零点至少有()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

答案 B

解析: 由图表可知 $f(2) \cdot f(3) < 0, f(3) \cdot f(4) < 0, f(4) \cdot f(5) < 0$,

又 $f(x)$ 为连续不断的曲线, 故 $f(x)$ 在区间 $[1, 6]$ 上至少有 3 个零点.

例 5.

练习 已知曲线 $y = (\frac{1}{10})^x$ 与 $y = x$ 的交点的横坐标是 x_0 , 则 x_0 的取值范围是()

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $\frac{1}{2}$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(1, 2)$

答案 A

解析: 设 $f(x) = (\frac{1}{10})^x - x$, 则 $f(0) = 1 > 0, f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{10})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \sqrt{0.1} - \sqrt{0.25} < 0$,

$f(1) = \frac{1}{10} - 1 < 0, f(2) = (\frac{1}{10})^2 - 2 < 0$,

同步练习

第十一节 函数的零点 (第 16 页)

1. 答案 A

解析: A 中令 $x^2=0$, $x=0$, 故该函数存在零点.

2. 答案 A

解析: 由函数的零点与方程的解的关系可知, 若函数 $f(x)=x^2+2x-a$ 没有零点, 则方程 $x^2+2x-a=0$ 没有实数解, 即 $\Delta=4+4a<0$, 所以 $a<-1$.

3. 答案 C

解析: 方程 $2x^2-3x-1=0$ 中 $\Delta=9+8>0$ 所以函数有两个零点

4. 答案 B

解析: $\because a \neq 0, -a+1=0, \therefore a=1$ 令 $x^2-ax=0$, 得 $x=0$ 或 $x=1$.

5. 答案 C

解析: 令 $f(x)=x^3-x-1$, 则 $f(1)=-1<0$, $f(1.5)=1.5^3-1.5-1=1.5^3-2.5>0$,

6. 答案 C

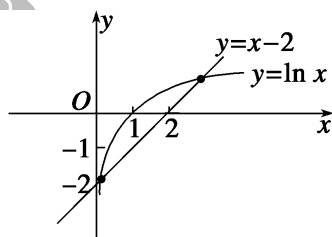
解析: $\because f(x)=e^x+x-2$, $f(0)=e^0-2=-1<0$,

$f(1)=e^1+1-2=e-1>0$, $\therefore f(0) \cdot f(1)<0$, $\therefore f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在零点

7. 答案 2

解析: 该函数零点的个数就是函数 $y=\ln x$ 与 $y=x-2$ 图象的交点个数.

在同一坐标系中作出 $y=\ln x$ 与 $y=x-2$ 的图象如下图:



由图象可知, 两个函数图象有 2 个交点, 即函数 $f(x)=\ln x-x+2$ 有 2 个零点.

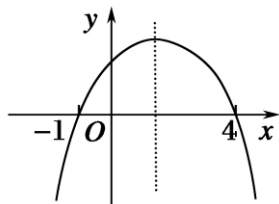
8. 答案 1

解析: 设 $f(x)=e^2-(x+2)$, 由题意知 $f(-1)<0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$, 所以方程的一个实根在区间 $(1, 2)$ 内, 即 $k=1$.

9. 解析: 因为函数 $f(x)=\frac{2}{3^x+1}+a$ 有一个零点为 1,

所以 1 是方程 $\frac{2}{3^x+1} + a = 0$ 的一个根, 则 $\frac{2}{3+1} + a = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$

10. 解析: (1) 由 $y = -x^2 + 3x + 4 = -(x^2 - 3x - 4) = -(x-4)(x+1)$, 得函数的零点为 $-1, 4$.



(2) 函数解析式的二次项系数小于 0, 因此图象的开口向下, 画出函数的简图如图所示.

观察图象可知: 当 $-1 < x < 4$ 时, $y > 0$; $\therefore -1 < x < 4$

第三章 导数

第一节 导数的概念及其运算 (第 24 页)

典例精析

例 1.

练习 已知函数 $f(x) = x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均变化率为_____

答案 2

解析: $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 + 1}{1 - 0} = 2$

例 2

练习 求下列函数的导数

(1) $y = 2x$ (2) $y = 3x^2$ (3) $y = -\frac{1}{3}x^3$ (4) $y = \frac{2}{x}$ (5) $y = 2\sqrt{x}$

答案 (1) 2 (2) $6x$ (3) $-x^2$ (4) $-\frac{2}{x^2}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

解析: (1) $y' = 2$ (2) $y' = 6x$ (3) $y' = -x^2$ (4) $y' = -\frac{2}{x^2}$ (5) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

例 3

练习 求函数 $y = x^2 - 3\sin x$ 的导数

答案 $2x - 3\cos x$

解析: $y' = (x^2)' - 3(\sin x)' = 2x - 3\cos x$

例 4

练习 若 $f(x) = 2x - 4\ln x$, 则 $f'(x) > 0$ 的解集是_____.

答案 $(2, +\infty)$

解析: $f'(x) = 2 - \frac{4}{x} > 0 \because x > 0 \therefore x > 2$

例 5

练习 求下列函数的导数:

(1) $f(x) = 2^x - 2 \ln x$ (2) $h(x) = x \sin x$; (3) $g(x) = (2x-1)(x+3)$

答案 (1) $2^x - \frac{2}{x}$ (2) $\sin x + x \cdot \cos x$ (3) $4x+5$

解析: (1) $f'(x) = 2^x - \frac{2}{x}$

(2) $h'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$

(3) $g'(x) = (2x^2 + 5x - 3)' = 4x + 5$

同步练习

第一节 导数的概念及其运算 (第 17 页)

1. 答案 C

解析: $Q f(x) = x^3 \therefore f'(x) = 3x^2 \therefore f'(x_0) = 3x_0^2 = 3 \therefore x_0 = 1, -1$

2. 答案 C

解析: 由题 $f'(x) = ((2\pi x)^2)' = 8\pi x$, 故选 C.

3. 答案 D

解析: $Q y = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \therefore y' = 8x + 4$, 当 $x=1$ 时 $y' = 12$

4. 答案 D

解析: 由题意: $f(x) = \frac{x}{x-2}$, 求导: $f'(x) = \frac{x'(x-2) - (x-2)'x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$,

再求 $f'(1) = \frac{-2}{1} = -2$

5. 答案 B

解析: $Q f(x) = x \ln x \therefore f'(x) = \ln x + 1 \therefore f'(x_0) = \ln x_0 + 1 = 2 \therefore x_0 = e$

6. 答案 D

解析: $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 2 \therefore f'(x) = 3ax^2 + 6x \therefore f'(-1) = 3a - 6 = 4 \therefore a = \frac{10}{3}$

7. 答案 B

解析: $f'(x) = -2 + 3ax^2$, $Q f'(2) = -2 + 3a \times 2^2 = 12a - 2 = 1$, $\therefore a = \frac{1}{4}$. 故 B 正确.

8. 答案 $\cos x - x \cdot \sin x$

9. 答案 $\ln x + 1 + 2^x$

10. 答案 $2x+3$

11. 解析: $\because y' = a(a+b)x^{(a+b-1)} = 6x$

$$\therefore \begin{cases} a+b-1=1 \\ a(a+b)=6 \end{cases} \therefore a+b=2,$$

$$\therefore a=3, b=-1$$

第二节 导数的几何意义 (第 25 页)

(2015) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 1$, 且 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴垂直. (I) 求实数 a 的值;

解析: (I) 因为函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 1$, 所以 $f'(x) = x^2 - a$,

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 的切线与 y 轴垂直,

所以 $f'(1) = 0$, 即 $1 - a = 0$, 解得 $a = 1$.

(2016) 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^3 + ax^2 - 3ax$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

解: $\because f'(x) = \frac{1}{x} \therefore k=1, f(1)=0$

$\therefore$ 切线方程为 $y=x-1$

典例精析

例 1

练习 物体的运动方程是 $s = 2t^2$ (s 的单位为 m , t 的单位为 s), 则物体在 $t = 3$ 时的瞬时速度为_

答案 $12m/s$

解析 $v = s' = 4t|_{t=3} = 12$

例 2

练习 下面说法正确的是()

- A. 若 $f'(x_0)$ 不存在, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处没有切线
- B. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线, 则 $f'(x_0)$ 必存在
- C. 若 $f'(x_0)$ 不存在, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率不存在
- D. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处没有切线, 则 $f'(x_0)$ 有可能存在

答案 C

解析: $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

例 3

练习 曲线 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 在 $x=2$ 处的切线斜率为_____.

答案 0

解析 $\because f'(x) = \frac{(e^x)'(1-x) - e^x(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{e^x(1-x) - e^x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} \therefore K=f'(2)=0$

例 4

练习 求 $y = x^2 + 2x - 3$ 在 $x = 2$ 处的切线方程_____

答案 $6x - y - 7 = 0$

解析 $\because x=2, y=5, k = 2x + 2|_{x=2} = 6, \therefore$

切线方程为 $y-5=6(x-2)$ 即 $6x-y-7=0$

例 5

练习 过点 $P(-1,2)$ 且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线方程是_____

答案 $2x - y + 4 = 0$

解析: 由题意知, $\therefore k=y'|_{x=1} = 2.$

$\therefore$ 所求直线的方程为 $y-2=2(x+1)$. 即 $2x-y+4=0$

同步练习

第二节 导数的几何意义 (第 18 页)

1. 答案 B

解析 $\because k=f'(x_0)=0 \therefore$ 切线与 x 轴平行或重合

2. 答案 C

解析 $\because$ 瞬时速度 $v = s'(t) = \frac{1}{4}t|_{t=2} = \frac{1}{2}$

3. 答案 D

解析 $\because k = y' = 2x|_{x=0} = 0 \therefore$ 切线方程为 $y = 0$

4. 答案 A

解析 $\because k = y'|_{x=1} = x|_{x=1} = 1$

5. 答案 C

解析 $\because k = f'(2)$, 切线方程为 $y - 3 = f'(2)(x - 2)$

$$\therefore \text{把点} (-1, 2) \text{代入得} -1 = -3f'(2) \therefore f'(2) = \frac{1}{3} \neq 0$$

6. 答案 B

解析 $\because 2x + y + 1 = 0$ 化为 $y = -2x - 1 \therefore k = -2$

$$\text{又} \because k = h'(a) = -2 < 0$$

7. 答案 $y = 4x + 8$

$$\text{解析} \quad \because k = y' = 3x^2 + 1 \Big|_{x=1} = 4$$

$$\therefore \text{切线方程为 } y - 0 = 4(x - 1) \text{ 即 } y = 4x + 8$$

8. 答案 $y = 3x - 2$

解析 $x = 1$ 时 $y = 1, \therefore y' = 3x^2 \therefore k = 3$

$$\therefore \text{切线方程为 } y - 1 = 3(x - 1) \text{ 即 } y = 3x - 2$$

9. 答案 -1

解析 $\because f(x)$ 是偶函数 $\therefore f(-x) = f(x), f'(-x) = (-x)' f'(-x) = -f'(-x) = f'(x)$

$$\because f'(1) = 1 \therefore -f'(-1) = f'(1), f'(-1) = -1$$

10. 答案 2

解析: $\because$ 点 P 在切线上, $\therefore f(5) = -5 + 8 = 3$,

$$\text{又} \because f'(5) = k = -1, \therefore f(5) + f'(5) = 3 - 1 = 2.$$

11. 解: $f'(x) = 2ax + b \therefore k = f'(1) = 2a + b = 4$

$$\text{由已知可得} \begin{cases} a + b - 7 = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = -4, b = 12.$$

12. 解: $\because x = 2, y = \frac{5}{2} \therefore$ 切点 $(2, \frac{5}{2})$

$$\text{又} \because y' = \frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{切线方程 } y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}(x - 2)$$

即 $3x - 4y + 4 = 0$;

第三节 导数与函数单调性 (第 26 页)

真题重现

(2014) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax$ 在 $x = 1$ 处取得极值。

(I) 求实数 a 的值;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $[k, k+1]$ 是单调函数, 求实数 k 的取值范围。

解: (I) 显然 $x \in \mathbf{R}$, 且 $f'(x) = 3x^2 + a$, 依题意: $f'(1) = 3 \times 1^2 + a = 0$,

因此 $a = -3$ 。

(II) 由 (I) 知, $f'(x) = 3x^2 - 3$, 由 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ 或 $x = -1$,

易知: 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$; 单调减区间是 $(-1, 1)$,

要使 $f(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内单调递增, 则在 $k+1 \leq -1$ 或 $k \geq 1$, 即 $k \leq -2$ 或 $k \geq 1$;

要使 $f(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内单调递减, 则 $k+1 \leq 1$ 且 $k \geq -1$, 即 $-1 \leq k \leq 0$;

综上, 要使 $f(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内单调, 则 $k \leq -2$ 或 $-1 \leq k \leq 0$ 或 $k \geq 1$ 。

典例精析

例 1

练习 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 若 $x > 1$ 时 $f'(x) < 0$, 则下列各项正确的是()

A. $f(0) > f(1)$ B. $f(0) = f(1)$ C. $f(2) < f(1)$ D. $f(2)$ 与 $f(1)$ 大小不定

答案 C

解析: 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数, $\therefore f(1) > f(2)$ 。

例 2

练习 函数 $f(x) = 2x - \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是()

A. 增函数 B. 减函数 C. 先增后减 D. 不确定

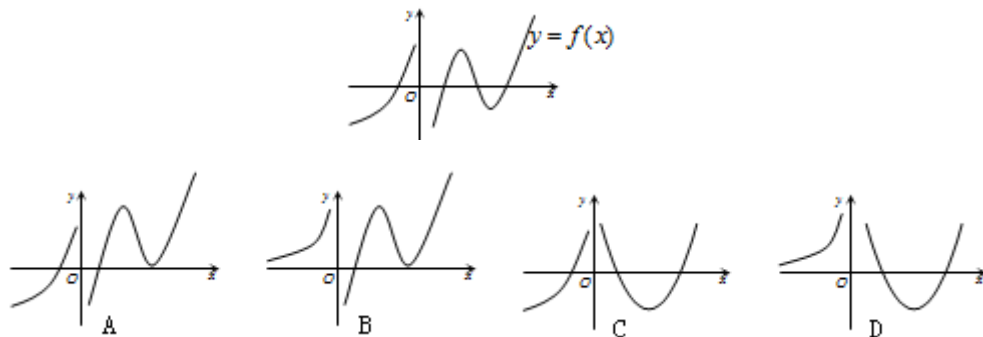
答案 A

解析 $f'(x) = 2 - \cos x, -1 \leq \cos x \leq 1, f'(x) \geq 1$

$\therefore$ 函数是增函数

例 3

练习 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图象如图, 则导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能为 ()



答案 D

解析: 根据函数 $y=f(x)$ 的图象, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, $f'(x) \geq 0$,

在 $(0, +\infty)$ 上先增再减后又增, 则 $f'(x)$ 先正再变负最后变成正, 所以选 D

考点: 函数 $y=f(x)$ 的单调性与 $f'(x)$ 的关系;

例 4.

练习 已知函数 $f(x)=x^3-ax-1$. 若 $f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围_____

答案 $a \leq 12$

解析 由题意 $x \in (2, 4)$, $f'(x) \geq 0$ 恒成立

$$\therefore 3x^2 - a \geq 0, a \leq 3x^2 \because (3x^2)_{\min} = 12$$

$$\therefore a \leq 12$$

例 5.

练习 求函数 $f(x)=x \ln x$ 的单调区间.

解析: 由题设知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \ln x + 1,$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 得 } \ln x > -1, x > e^{-1}$$

$$\text{由 } f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < e^{-1},$$

$$\therefore \text{函数 } f(x)=x \ln x \text{ 的单调增区间为 } (e^{-1}, +\infty) \text{ 单调减区间为 } (0, e^{-1}).$$

同步练习

第三节 导数与函数单调性 (第 19 页)

1. 答案 A

解析 $\because f'(x) < 0 \therefore$ 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内递减

$$\therefore f(b) < f(x) < f(a) \because f(b) \geq 0 \therefore f(x) > 0$$

2. 答案 A

解析 $\because f'(x) = e^x \neq 0 \therefore$ 函数 $f(x) = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

3. 答案 A

解析 $\because f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \therefore$ 函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

4. 答案 A

解析 $\because f'(x) = 2 - \sin x \neq 0$

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2x + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

5. 答案 B

解析 A. $(\sin x)' = \cos x$ 不恒小于 0 所以不为减函数,

同理 C. $(x^3 - x)' = 3x^2 - 1$ D. $(\ln x - x)' = \frac{1}{x} - 1$ 均不恒小于 0

B. $(-x^2)' = -2x < 0 \therefore -x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内为减函数所以选 B

6. 答案 C

解析 $\because$ 函数 $y = ax^2 - x$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调递增

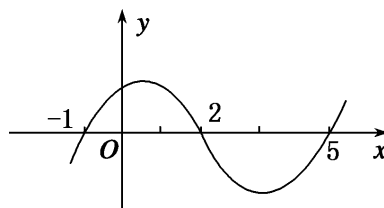
$\therefore y' = 2ax - 1 \geq 0$ 恒成立 $\therefore x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

$\therefore a \geq (\frac{1}{2x})_{\max} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1 \therefore a$ 的取值范围为 $[1, +\infty)$

7. 答案 $(-1, 2), (5, +\infty)$

解析: 从图象可知 $f'(x) > 0$ 的解为 $-1 < x < 2$ 或 $x > 5$,

即 $f(x)$ 的递增区间为 $(-1, 2), (5, +\infty)$.



8. 解析: $\because f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

9. 解析: 由题设知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x^2 > 1$, $\therefore x < -1$ 或 $x > 1$

由 $f'(x) < 0$, 得 $x^2 < 1 \therefore -1 < x < 1$

$\therefore$ 函数的单调增区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 单调减区间为 $(-1, 1)$.

10. 解析: 由题设知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

由 $f'(x) > 0$, 得 $\ln x < 1$, $0 < x < e$

由 $f'(x) < 0$, 得 $x > e$,

∴ 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调增区间为 $(0, e)$ 单调减区间为 $(e, +\infty)$.

第四节 导数与函数的极值和最值 (第 28 页)

真题重现

(2015) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 1$, 且 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴垂直.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 的最大值;

(III) 是否存在实数 k , 使得直线 $y = k(x-1) - \frac{4}{3}$ 与曲线 $y = f(x)$ 有三个交点?

若存在, 求出实数 k 的取值范围, 若不存在, 说明理由.

解: (I) 因为函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 1$, 所以 $f'(x) = x^2 - a$,

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 的切线与 y 轴垂直,

所以 $f'(1) = 0$, 即 $1 - a = 0$, 解得 $a = 1$.

(II) 由 (I) 得函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$, $f'(x) = x^2 - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \pm 1$,

列表如下:

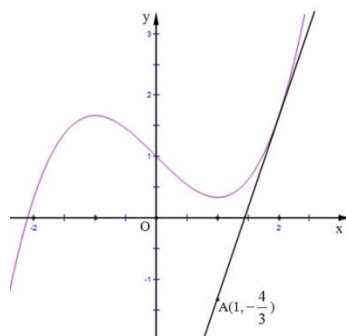
由上表可知 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $\frac{5}{3}$

x	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	递增	极大值 $\frac{5}{3}$	递减	极小值 $\frac{1}{3}$	递增	$\frac{5}{3}$

(III) 因为直线 $y = k(x-1) - \frac{4}{3}$ 经过定点直线 $A(1, -\frac{4}{3})$, 做示意图如右, 可知当直线与曲线相切, 或 $k < 0$ 或不存在时, 直线与曲线有且仅有 1 个交点, 设直线 $y = k(x-1) - \frac{4}{3}$ 与曲线相切于点

(x_0, y_0) ,

则 $y_0 = k(x_0 - 1) - \frac{4}{3}$, $y_0 = \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + 1$,



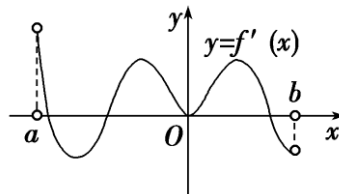
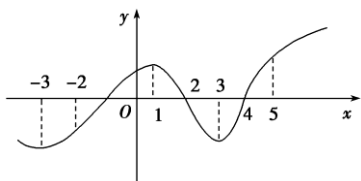
$k = x_0^2 - 1$, 解得 $k = 3$, 从而存在实数 $k \in (3, +\infty)$, 使得直线 $y = k(x-1) - \frac{4}{3}$

与曲线 $y = f(x)$ 有三个交点。

典例精析

例 1

练习 如图是函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 在开区间 $(-3, 5)$ 内有极大值点个数为()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

答案 A

例 2

练习 设函数 $f(x) = xe^x$, 则 ()

- A. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点 B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点
C. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点 D. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

答案 D

解析 $f'(x) = x' \cdot e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$

$$\text{令 } f'(x) = 0, e^x + xe^x = 0, x = -1$$

$$\therefore x < -1, f'(x) < 0, x > -1, f'(x) > 0$$

$\therefore x = -1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

例 3.

练习 函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ 取得极小值时, x 的值是_____.

答案 -1

解析 $f'(x) = -x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2)$

$$\text{令 } f'(x) = 0, x = -1 \text{ 或 } x = 2$$

$$\therefore x < -1 \text{ 时 } f'(x) < 0, x > -1 \text{ 时 } f'(x) > 0$$

∴函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ 取得极小值时 $x = -1$

例 4.

练习 已知 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$, 若 $f(x) - m < 0$ 在 $x \in [-1, 2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案 $(5, +\infty)$

解析: 由 $f(x) - m < 0$, 即 $m > f(x)$ 恒成立, 知 $m > f(x)_{\max}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = -\frac{1}{3} \text{ 或 } x = 1.$$

$$\text{因为 } f(-\frac{1}{3}) = \frac{86}{27}, f(1) = 2, f(-1) = 2, f(2) = 5.$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 5, 故 m 的取值范围为 $(5, +\infty)$.

同步练习

第四节 导数与函数的极值和最值 (第 20 页)

1. 答案 C

2. 答案 B

3. 答案 A

解析 ∵ $y' = 3x^2 - 3 = 0$ 时 $x = 1$ 或 $x = -1$

$$\because x < 1 \text{ 时 } y' < 0, x > 1 \text{ 时 } y' > 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 时函数 } y = x^3 - 3x + c \text{ 取极小值 } -2 + c = 0$$

$$\therefore c = 2$$

4. 答案 D

解析 ∵ $y' = 3ax^2 + 2bx = 0$ 的两根为 0 和 $\frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{1}{3}(a + 2b) = 0 \therefore a + 2b = 0$$

5. 答案 D

解析 ∵ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0, x = 1$

$$\because x \pi 1, f'(x) \pi 0; x \phi 1, f'(x) \phi 0$$

∴ $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

6. 答案 A

解析 $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1) = 0, x = -1, x = 2$

$$\because x \in (-1, 0], y' \in (-1, 0]$$

$\therefore x = -1$ 时函数取最大值 $-2 - 3 + 12 + 5 = 12$,

$x = 1$ 时函数取最小值 $2 - 3 - 12 + 5 = -8$

7. 答案 -1

解析 $y' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = 0, x = -1$

$$\because x \in (-1, 0], y' \in (-1, 0]$$

$\therefore$ 函数 $y = xe^x$ 的极值点为 $x = -1$

8. 答案 $0 < b < \frac{1}{2}$

解析 函数 $f(x) = x^3 - 6bx + 3b$ 在 $(0, 1)$ 内有极小值则 $f'(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有解

$$\therefore 3x^2 - 6b = 0, b = \frac{x^2}{2} \in (0, \frac{1}{2}) \therefore 0 < b < \frac{1}{2}$$

9. 解析 $f'(x) = 3 - 3x^2$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm 1$.

$$f(1) = 2 + a, f(-1) = -2 + a.$$

$$\text{又 } f(-\sqrt{3}) = a, f(3) = -18 + a.$$

$$\therefore f(x)_{\min} = -18 + a. \text{ 由 } -18 + a = 8. \text{ 得 } a = 26.$$

10. 解析 : (1) 依题意可知点 $P(1, f(1))$ 为切点, 代入切线方程 $y = 3x + 1$ 可得,

$$f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4,$$

$$\therefore f(1) = 1 + a + b + 5 = 4, \text{ 即 } a + b = -2,$$

又由 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ 得, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,

而由切线方程 $y = 3x + 1$ 的斜率可知 $f'(1) = 3$,

$$\therefore 3 + 2a + b = 3, \text{ 即 } 2a + b = 0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} a + b = -2, \\ 2a + b = 0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = -4, \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = -4.$$

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x + 2),$$

令 $f'(x) = 0$,

$$\text{得 } x = \frac{2}{3} \text{ 或 } x = -2.$$

当 x 变化时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 1)$	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	8	增	极大值	减	极小值	增	4

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=13$, 极小值为 $f(\frac{2}{3})=\frac{95}{27}$,

又 $f(-3)=8$, $f(1)=4$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 13.

第五节 生活中的优化问题 (第 29 页)

典例精析

例 1

练习 某箱子的容积与底面边长 x 的关系为 $V(x)=x^2 \cdot (\frac{60-x}{2}) (0 < x < 60)$, 则当箱子的容积最大时, 箱子底面边长为()

A. 30 B. 40 C. 50 D. 35

答案 B

解析 $V'(x) = 2x \cdot \frac{60-x}{2} + x^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{-3x^2 + 120x}{2}$

$$\text{令 } V'(x) = 0, \frac{-3x^2 + 120x}{2} = 0$$

$$\therefore x = 40, \text{ 当 } x < 40, V'(x) > 0; x > 40, V'(x) < 0$$

$\therefore x = 40$ 时 $V(x)$ 取极大值

例 2

练习 把长为 60cm 的铁丝围成矩形, 长为 15cm, 宽为 15cm 时, 矩形的面积最大.

答案 长为 15cm, 宽为 15cm 时矩形的面积最大.

解析 设矩形的长为 x cm 则宽为 $(30-x)$ cm

$$S = x(30-x) = -x^2 + 30x, S' = -2x + 30$$

$$\text{令 } S' = 0 \therefore x = 15 \therefore x < 15 \text{ 时 } S' > 0, x > 15 \text{ 时 } S' < 0$$

$\therefore x = 15$ 时 S 取最大值

$\therefore$ 长为 15cm, 宽为 15cm 时矩形的面积最大

例 3

练习 把一个周长为 12 cm 的长方形围成一个圆柱, 当圆柱的体积最大时, 该圆柱底面周长与高的比

为()

- A. 1 :2 B. 1: π C. 2: 1 D. 2: π

答案 C

解析 设该圆柱底面半径为 x cm, 则底面周长为 $2\pi x$ cm, 高为 $(6-2\pi x)$ cm

$$v = \pi x^2 (6 - 2\pi x) = 6\pi x^2 - 2\pi^2 x^3$$

$$v' = 12\pi x - 6\pi^2 x^2 = 6\pi x(2 - \pi x)$$

$$\text{令 } v' = 0, x = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore x < \frac{2}{\pi} \text{ 时 } v' > 0, x > \frac{2}{\pi} \text{ 时 } v' < 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{\pi} \text{ 时 } v \text{ 取极大值即最大值}$$

$$\therefore \text{该圆柱底面周长与高的比: } \frac{2\pi x}{6 - 2\pi x} = \frac{2\pi \frac{2}{\pi}}{6 - 2\pi \frac{2}{\pi}} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

同步练习

第五节 生活中的优化问题 (第 21 页)

1. 答案 A
2. 答案 B
3. 答案 B
4. 答案 C

解析 $\because y' = -x^2 + 81 = -(x-9)(x+9)$

$$\therefore \text{令 } y' = 0, x = 9$$

$$\text{又 } \because x < 9, y' > 0; x > 9, y' < 0$$

$$\therefore x = 9 \text{ 时 } y \text{ 取最大值}$$

5. 答案 A

解析 设矩形堆料场宽为 x 米, 则长为 $\frac{512}{x}$ 米, 砌壁所用的材料为 y 米

$$y = 2x + \frac{512}{x}$$

$$y' = 2 - \frac{512}{x^2}, \text{ 令 } y' = 0, x = 16$$

$\Theta x \neq 16, y' \neq 0; x \neq 16, y' \neq 0 \therefore x = 16, y$ 取最小值

$\therefore$ 堆料场的长和宽分别为 32 米, 16 米时砌壁所用的材料最省。

6. 解析: 令 $y' = -\frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{2}t + 36 = 0$,

即 $3t^2 + 12t - 36 \times 8 = 0$,

解得 $t = 8$ 或 $t = -12$ (舍去)。

当 $0 < t < 8$ 时, $y' > 0$; 当 $t > 8$ 时, $y' < 0$ 。

所以当 $t = 8$ 时, 函数有极大值, 也是最大值。

7. 围成的场地面积最大为 2,00 m²

解析: 设靠墙的一面长 x m, 围成的场地面积为 y m²,

此时矩形的宽为 $\frac{40-x}{2} > 0$ 。

$$\therefore y = x \cdot \frac{40-x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 20x. (0 < x < 40)$$

$$y' = -x + 20,$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 20$,

当 $0 < x < 20$ 时, $y' > 0$;

当 $20 < x < 40$ 时, $y' < 0$ 。

$$\therefore x = 20 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = 20 \times 10 = 200.$$

8. 解析: 由题意知, 存款量 $g(x) = kx (k > 0)$,

银行应支付的利息 $h(x) = xg(x) = kx^2, x \in (0, 0.048)$ 。

设银行可获得收益为 y , 则 $y = 0.048kx - kx^2$ 。

于是 $y' = 0.048k - 2kx$ 。

令 $y' = 0$, 得 $x = 0.024$ 。

依题意知, y 在 $x = 0.024$ 处取得最大值。

9. 解析: 设水箱底边长为 x cm, 则水箱高为 $h = 60 - \frac{x}{2}$ (cm)。

水箱容积 $V = V(x) = 60x^2 - \frac{x^3}{2} (0 < x < 120) (\text{cm}^3)$ 。

$$V'(x) = 120x - \frac{3}{2}x^2.$$

令 $V'(x) = 0$ 得,

$x = 0$ (舍) 或 $x = 80$ 。

当 x 在 $(0, 120)$ 内变化时，导数 $V'(x)$ 的正负如下表：

x	$(0, 80)$	80	$(80, 120)$
$V'(x)$	+	0	-

因此在 $x=80$ 处，函数 $V(x)$ 取得极大值，

并且这个极大值就是函数 $V(x)$ 的最大值。

将 $x=80$ 代入 $V(x)$ ，

$$\text{得最大容积 } V=80^2 \times 60 - \frac{80^3}{2} = 128\,000 \text{ (cm}^3\text{)}.$$